

## § 1. CẤU TẠO SỐ TỰ NHIÊN

### Bài 1:

Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu lấy chữ số hàng chục chia cho chữ số hàng đơn vị thì được thương là 2 dư 2, chữ số hàng trăm chia cho chữ số hàng đơn vị thì được thương là 2 dư 1.

**Hd:**

+ Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$ , ( $a, b, c$  là các chữ số từ 0 đến 9,  $a$  khác 0).

Ta có:  $b = c \times 2 + 2$ . Chữ số hàng đơn vị phải lớn hơn 2 ( vì số dư là 2). Chữ số hàng đơn vị cũng không thể lớn hơn 3 (vì nếu chẳng hạn bằng 4 thì  $b = 4 \times 2 + 2 = 10$ ). Vậy suy ra  $c = 3$ .

+ Ta thấy:  $b = 3 \times 2 + 2 = 8$ . Theo đề bài ta lại có:  $a = c \times 2 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$ .

Thử lại:  $8 = 3 \times 2 + 2$ ;  $7 = 3 \times 2 + 1$ .

### Bài 2:

Tìm một số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng nếu lấy số đó cộng với tổng các chữ số của nó thì được 2000.

**Hd:**

+ Giả sử số đó là  $\overline{abcd}$ ,  $a \neq 0$ ;  $0 < a, b, c, d < 10$

Theo đề bài ta có  $2000 - \overline{abcd} = a + b + c + d$  hay  $2000 - (a + b + c + d) = \overline{abcd}$ .

Lập luận để có  $\overline{ab} = 19$ .

+ Từ đó tìm được  $c = 8$  và  $d = 1$ .

Thử lại:  $2000 - 1981 = 1 + 9 + 8 + 1 = 19$ .

Vậy số cần tìm là 1981.

### Bài 3:

Tìm số tự nhiên A có 2 chữ số, biết rằng B là tổng các chữ số của A và C là tổng các chữ số của B, đồng thời cho biết  $A = B + C + 51$ .

**Hd:**

+ Giả sử  $A = \overline{ab}$ ,  $a \neq 0$ ;  $0 < a, b < 10$ .

Lập luận để có C là số có một chữ số  $c$  nên  $\overline{ab} = a + b + c + 51$  hay  $a \times 9 = c + 51$

Từ  $a \times 9 = c + 51$  lập luận để có  $a = 6$ .

+ Từ  $a = 6$  tìm được  $c = 3$ .

Nên số phải tìm là  $\overline{6b}$ . Xét lần lượt 60, ..., 69 ta thấy chỉ có 66 là cho kết quả  $c = 3$ . Thử lại:  $12 + 3 + 51 = 66$ .

Vậy 66 là số cần tìm.

### Bài 4:

Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng khi chia số đó cho hiệu của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì được thương là 15 và dư 2.

**Hd:**

+ Gọi số phải tìm là  $\overline{ab}$ , ( $a \neq 0$ ;  $a, b < 10$ )

Theo đầu bài ta có  $\overline{ab} = (a - b) \times 15 + 2$

Hay  $b \times 16 = a \times 5 + 2$

Nếu  $a$  lớn nhất là 9 thì  $a \times 5 + 2$  lớn nhất là 47.

Khi đó  $b \times 16$  lớn nhất là 47 nên  $b$  lớn nhất là 2 (vì  $47 : 16 = 2$  dư 15)

+ Vì  $a \times 5 + 2 \neq 0$  nên  $b \neq 0$ .

$b = 1$  thì  $a = 14 : 5$  (loại)

$b = 2$  thì  $a = 6$ .

Thử lại.  $(6 - 2) \times 15 + 2 = 62$ .

Số phải tìm là 62.

### **Bài 5:**

Tim một số có 2 chữ số, biết rằng nếu lấy số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 5 dư 12.

**Hd:**

+ Gọi số phải tìm là  $\overline{ab}$ , ( $0 \leq a, b < 10, a \neq 0$ ).

Ta có  $\overline{ab} = 5 \times (a + b) + 12$ , với  $a + b > 12$ .

Sau khi biến đổi ta có:  $5 \times a = 4 \times b + 12$ .

+ Vì  $4 \times b + 12$  chia hết cho 4 nên  $5 \times a$  chia hết cho 4, suy ra  $a = 4$  hoặc  $a = 8$ , thay vào ta tìm được  $a = 8$ . Thử lại thấy thoả mãn.

Kết luận: Số phải tìm là 87.

### **Bài 6:**

Tim một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu lấy số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 11.

**Hd:**

+ Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$ , ( $a, b, c$  là các chữ số từ 0 đến 9,  $a$  khác 0).

$\overline{abc} = (a + b + c) \times 11$  (theo bài ra)

$100 \times a + 10 \times b + c = 11 \times a + 11 \times b + 11 \times c$  (cấu tạo số và nhân một số với một tổng)

$89 \times a = b + 10 \times c$  (cùng bớt đi  $11 \times a + 10 \times b + c$ )

$89 \times a = \overline{cb} \Rightarrow a = 1, \overline{cb} = 89 \Rightarrow \overline{abc} = 198$

### **Bài 7:**

Tim số chia và thương của một phép chia có dư mà số bị chia là 5544, các số dư lần lượt là 10, 14 và cuối cùng là 9.

**Hd:**

- Lập luận để có thương là số có 3 chữ số, còn số chia là số có 2 chữ số.

- Mô phỏng quá trình chia:

- Tim 3 tích riêng tương ứng với 3 lần chia có 3 số dư là 10, 14, 9.

+ Tích của số chia và chữ số hàng cao nhất của thương là  $55 - 10 = 45$

+ Tích của số chia và chữ số hàng cao thứ 2 của thương là  $104 - 14 = 90$ .

+ Tích của số chia và chữ số hàng cao thứ 3 của thương  $114 - 9 = 135$

Trong 3 tích riêng có số 45 là số lẻ và nhỏ nhất nên số chia là số lẻ, mà số 45 chỉ chia hết cho số có 2 chữ số là 45. Vậy số chia là 45, thương là 123.

$$\begin{array}{r} 5544 \quad | \quad \dots \\ - \dots \quad \dots \\ \hline 104 \\ - \dots \\ \hline 144 \\ - \dots \\ \hline 9 \end{array}$$

### **Bài 8:**

Khi nhân một số tự nhiên với 2008, một học sinh đã quên viết một chữ số 0 ở số 2008 nên tích đúng bị giảm đi 221400 đơn vị. Tim thừa số chưa biết.

**Hd:**

Thừa số đã biết là 2008, nhưng đã viết sai thành 208. Thừa số này bị giảm đi  $2008 - 208 = 1800$  (đvị).

Thừa số chưa biết được giữ nguyên, thừa số đã biết bị giảm đi 1800 đơn vị thì tích bị giảm đi là 1800 lần thừa số chưa biết.

Theo đề bài số giảm đi là 221400. Vậy thừa số chưa biết là  $221400 : 1800 = 123$ .

### **Bài 9:**

Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị, ta được thương là 28 dư 1.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{ab}$ , ( $0 \leq a, b < 10, a \neq 0$ ).

Ta có  $\overline{ab} = (a - b) \times 28 + 1$ .

Khi đó  $0 < a - b < 4$  vì nếu không thì  $\overline{ab}$  không phải là số có 2 chữ số.

Nếu  $a - b = 1$  thì  $\overline{ab} = 29$  loại vì a không trừ được cho b.

Nếu  $a - b = 2$  thì  $\overline{ab} = 57$  loại vì a không trừ được cho b.

Nếu  $a - b = 3$  thì  $\overline{ab} = 85$  chọn vì  $a - b = 8 - 5 = 3$ .

### **Bài 10:**

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng số đó gấp 20 lần tổng các chữ số của nó.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abc} = (a + b + c) \times 20$ .

Vế trái có tận cùng là 0 nên vế phải có tận cùng là 0, hay  $c = 0$ .

Khi đó  $10 \overline{ab} = 20(a + b)$

Suy ra  $\overline{ab} = 2(a + b)$  suy ra  $10a + b = 2a + 2b$

khi đó ta có:  $8 \times a = b$  suy ra  $a = 1, b = 8$ .

Thử lại:  $180 = (1 + 8 + 0) \times 20$ .

### **Bài 11:**

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng số đó gấp 5 lần tích các chữ số của nó.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abc} = 5 \times a \times b \times c$ . Điều này chứng tỏ  $\overline{abc} : 5$ , tức là  $c = 0$  hoặc  $c = 5$ .

Dễ thấy  $c = 0$  vô lý (Loại)

Với  $c = 5$ : Ta có  $\overline{ab5} : 25$ .

Vậy suy ra  $b = 2$  hoặc  $b = 7$ .

Với  $b = 2$  vô lý (Loại)

Với  $b = 7$ : Suy ra  $a = 1$ . Số phải tìm 175.

### **Bài 12:**

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu chuyển chữ số cuối lên trước chữ số đầu ta được số mới hơn số đã cho 765 đơn vị.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{cab} - \overline{abc} = 765$

$\Rightarrow 11 \times c = 85 + b + 10 \times a$

Vì  $85 + b + 10 \times a \geq 95 \Rightarrow 11 \times c \geq 95 \Rightarrow c = 9$

$$\Rightarrow 14 = b + 10 \times a \Rightarrow a = 1, b = 4.$$

Vậy số phải tìm là 149.

**Bài 13:**

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu ta xóa chữ số hàng trăm đi ta được số mới giảm đi 7 lần so với số ban đầu.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abc} = 7 \times \overline{bc}$

$$\Rightarrow a \times 100 = 6 \times \overline{bc}$$

$$\Rightarrow a \times 50 = 3 \times \overline{bc} \Rightarrow a \text{ là bội của } 3 \Rightarrow a = 3, \overline{bc} = 50$$

Vậy số phải tìm là 350

**Bài 14:**

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu ta viết số đó theo thứ tự ngược lại ta được số mới lớn hơn số đã cho 693 đơn vị.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{cba} - \overline{abc} = 693$

$$\Rightarrow 99 \times (c - a) = 693$$

$$\Rightarrow c - a = 693 : 99 = 7$$

$$\Rightarrow a = 1, c = 8 ; a = 2, c = 9 \text{ và } b = 0, 1, 2, \dots, 9$$

**Bài 15:**

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số có chữ số hàng đơn vị là 5, biết rằng nếu chuyển chữ số 5 lên đầu thì ta được số mới giảm bớt đi 531 đơn vị.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abc5}$ , ( $0 \leq a, b, c < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abc5} - 5\overline{abc} = 531$

$$\Rightarrow \overline{abc} \times 10 + 5 - (5000 + \overline{abc}) = 531$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 614 \text{ Vậy số phải tìm là: } 6145$$

**Bài 16:**

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì ta được số mới giảm đi 4455 đơn vị.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abcd}$ , ( $0 \leq a, b, c, d < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abcd} - \overline{ab} = 4455$

$$\Rightarrow \overline{cd} = 99 \times (45 - \overline{ab}) \Rightarrow (45 - \overline{ab}) = 0, (45 - \overline{ab}) = 1$$

Nếu  $(45 - \overline{ab}) = 0$ : Số phải tìm là 4500

Nếu  $(45 - \overline{ab}) = 1$ : Số phải tìm là 4499

**Bài 17:**

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được số mới gấp 4 lần số ban đầu.

**Hd:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abcd}$ , ( $0 \leq a, b, c, d < 10, a \neq 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{abcd} \times 4 = \overline{dcba}$

$\Rightarrow a = 1$  hoặc  $a = 2$  vì nếu  $a \geq 3$  thì tích  $\overline{abcd} \times 4$  không là số có 4 chữ số

Nếu  $a = 1$ : Ta có  $\overline{1bcd} \times 4 = \overline{dc1}$  đây là điều vô lý.

Nếu  $a = 2$ : Ta có  $\overline{2bcd} \times 4 = \overline{dc2} \Rightarrow 4 \times d$  có tận cùng là 2

$\Rightarrow d = 3$  hoặc  $d = 8$ .

Nếu  $d = 3$ : Ta có  $\overline{2bc3} \times 4 > \overline{3cb2}$  là vô lý

Nếu  $d = 8$ : Ta có  $\overline{2bc8} \times 4 = \overline{8cb2} \Rightarrow 390 \times b + 30 = 60 \times c$

$\Rightarrow 39 \times b + 3 = 6 \times c \Rightarrow b = 1, c = 7$

Vậy số phải tìm là: 2178

**Bài 18:**

Tìm số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì ta được số mới gấp 7 lần số ban đầu.

**Hd:**

Vì số phải tìm có chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị nên nó ít nhất phải là số có 2 chữ số. Vậy gọi số phải tìm là  $\overline{Ab}$ , ( $0 \leq b < 10, A > 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{Ab} \times 7 = \overline{A0b}$

$\Rightarrow b \times 6 = A \times 5 \times 6 \Rightarrow b = A \times 5 \Rightarrow b = 5$  (Vì  $A > 0$ )  $\Rightarrow A = 1$ . Số phải tìm là 15.

**Bài 19:**

Tìm số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng trăm thì ta được số mới gấp 6 lần số ban đầu.

**Hd:**

Vì số phải tìm có chữ số hàng chục và chữ số hàng trăm nên nó ít nhất phải là số có 3 chữ số. Vậy gọi số phải tìm là  $\overline{Abc}$ , ( $0 \leq b, c < 10, A > 0$ ).

Theo bài ra ta có:  $\overline{Abc} \times 6 = \overline{A0bc}$

$\Rightarrow \overline{bc} \times 5 = A \times 80 \times 5 \Rightarrow \overline{bc} = A \times 80 \Rightarrow \overline{bc} = 80$  (Vì  $A > 0$ )  $\Rightarrow A = 1$ .

Số phải tìm là 180.

## § 2. DÃY SỐ CÁCH ĐỀU

### **Bài 1:**

Cho dãy số 2, 4, 6, 8, ..., 2006.

- Dãy này có bao nhiêu số hạng? Số hạng thứ 190 là số hạng nào?
- Chữ số thứ 100 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Số các số hạng:  $(2006 - 2) : 2 + 1 = 1003$ .

Số hạng thứ 190 là:  $(190 - 1) \times 2 + 2 = 380$

b) Dãy số 2, 4, 6, ..., 98 có  $4 + [(98 - 10) : 2 + 1] \times 2 = 94$  chữ số.

Vì  $94 < 100$  nên chữ số thứ 100 phải nằm trong dãy số 100, 102, 104, ..., 998.

Chữ số thứ 100 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số thứ  $100 - 94 = 6$  của dãy số 100, 102, 104, ..., 998. Vậy chữ số thứ 100 là chữ số 2.

### **Bài 2:**

Cho dãy số 11, 13, 15, ..., 175.

a) Tính số chữ số đã dùng để viết tất cả các số hạng của dãy số đã cho. Chữ số thứ 136 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

b) Tính tổng các số hạng của dãy số đã cho.

**Hd:**

a) Dãy số 11, 13, ..., 99 có  $[(99 - 11) : 2 + 1] \times 2 = 90$  chữ số. Dãy số 101, 103, ..., 175 có  $[(175 - 101) : 2 + 1] \times 3 = 114$  chữ số. Số các chữ số đã sử dụng trong dãy đã cho là:  $90 + 114 = 204$  (chữ số)

+ Vì  $204 > 136 > 90$  nên chữ số thứ 136 phải nằm trong dãy số 101, 103, ..., 175. Chữ số thứ 136 của dãy số 11, 13, 15, ..., 175 là chữ số thứ  $136 - 90 = 46$  của dãy số 101, 103, ..., 175.

+ Ta có:  $46 : 3 = 15$  (dư 1).

+ Tìm được số hạng thứ 16 của dãy số 101, 103, ..., 175 là 131.

Vậy chữ số thứ 136 của dãy đã cho là 1.

b) Số số hạng của dãy số đã cho là  $45 + 38 = 83$ .

Vậy suy ra:  $11 + 13 + 15 + \dots + 175 = (11 + 175) 83 : 2 = 7719$

### **Bài 3:**

Cho dãy số 4, 8, 12, 16, ...

a) Xét xem các số 2002 và 2008 có thuộc dãy số đã cho không? Nếu nó thuộc thì cho biết số thứ tự trong dãy của nó.

b) Chữ số thứ 74 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Đặc điểm của dãy số đã cho là các số hạng của dãy đều chia hết cho 4. Số 2002 không chia hết cho 4 nên không thuộc dãy số đã cho. Số 2008 chia hết cho 4 nên thuộc dãy số đã cho.

Số thứ tự trong dãy của số 2008 là  $(2008 - 4) : 4 + 1 = 502$ .

b) Trong dãy 12, 16, 20, ..., 96 có  $[(96 - 12) : 4 + 1] \times 2 = 44$  chữ số. Vậy chữ số thứ 74 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $74 - 44 = 30$  của dãy số 100, 104, 108, ...

Ta có  $28 : 4 = 7$  nên chữ số thứ 28 của dãy số 100, 104, 108, ... là chữ số cuối cùng của số hạng thứ 7 của dãy số 100, 104, 108, ... Chữ số cần tìm là 4.

### **Bài 4:**

Cho dãy số 11, 14, 17, 20, ...

a) Chữ số thứ 166 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

b) Tính tổng của 130 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

**Hd:**

a) Dãy số 11, 14, 17, ..., 98 có số chữ số là:  $[(98 - 11) : 3 + 1] \times 2 = 60$ .

Dãy số 101, 104, 107, ..., 998 có số chữ số là:  $[(998 - 101) : 3 + 1] \times 3 = 900$ .

Vì  $60 < 166 < 900$  nên chữ số thứ 166 phải nằm trong dãy số 101, 104, ..., 998.

Chữ số thứ 166 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $166 - 60 = 106$  của dãy số 101, 104, ..., 998.

Ta có:  $106 : 3 = 35$  (dư 1) nên chữ số thứ 166 của dãy số đã cho là chữ số đầu tiên của số hạng thứ 36 trong dãy số 101, 104, ..., 998.

Số hạng thứ 36 trong dãy số 101, 104, ..., 998 là 206. Vậy chữ số cần tìm là 2.

b) Số hạng thứ 130 là 398. Vậy tổng là  $(11 + 398) \times 100 : 2 = 20450$ .

### **Bài 5:**

Cho dãy số 1, 3, 5, 7, ..., 2009.

a) Dãy này có bao nhiêu số hạng? Số hạng thứ 230 là số hạng nào?

b) Chữ số thứ 100 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Số các số hạng:  $(2009 - 1) : 2 + 1 = 1005$ .

Số hạng thứ 230 là:  $(230 - 1) \times 2 + 1 = 459$

b) Chữ số thứ 100 là chữ số 0.

### **Bài 6:**

Cho dãy số 10, 12, 14, ..., 138.

a) Chữ số thứ 103 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

b) Tính tổng các số hạng của dãy số đã cho.

**Hd:**

a) Số các chữ số được sử dụng trong dãy 10, 12, ... 96, 98 là  $2 \times 45 = 90$  (chữ số).

Vì  $103 > 90$  nên chữ số thứ 103 của dãy số đã cho phải nằm trong dãy số 100, 102, ..., 138. Chữ số thứ 103 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $103 - 90 = 13$  của dãy số 100, 102, ..., 138.

+ Ta có:  $13 : 3 = 4$  (dư 1) nên chữ số thứ 103 của dãy số đã cho là chữ số đầu tiên của số hạng thứ 5 trong dãy số 100, 102, ..., 138.

Số hạng thứ 5 trong dãy số 100, 102, ..., 138 là 108. Vậy chữ số cần tìm là 1.

b) Số các số hạng của dãy là  $(138 - 10) : 2 + 1 = 65$

Vậy  $10 + 12 + 14 + \dots + 138 = (10 + 138) \times 65 : 2 = 4810$ .

### **Bài 7:**

Cho dãy số 101, 102, 103, ..., 1000, 1001, ..., 2005

a) Dãy này có bao nhiêu số hạng? Số hạng thứ 75 là số hạng nào?

b) Tính số chữ số đã dùng để viết tất cả các số hạng của dãy số đã cho. Chữ số thứ 116 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Số số hạng là  $(2005 - 101) : 1 + 1 = 1905$ .

Số hạng thứ 75 là  $(75 - 1) \times 1 + 101 = 175$ .

b) Số chữ số là  $899 \times 3 + 1006 \times 4 = 8721$ .

Vì có:  $116 < 899 \times 3$  nên chữ số thứ 116 thuộc dãy số 101, 102, ... 999.

Ta có  $116 : 3 = 38$  (dư 2) nên chữ số thứ 116 là chữ số thứ 2 của số hạng thứ 39 của dãy số đã cho. Số hạng thứ 39 là  $(39 - 1) \times 1 + 101 = 139$ . Vậy chữ số cần tìm là chữ số 3.

**Bài 8:**

Cho dãy số 11, 16, 21, 26, 31, ...

- a) Tính số chữ số đã dùng để viết các số hạng của dãy số đã cho kể từ số hạng đầu tiên đến số hạng 2001. Chữ số thứ 124 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?  
 b) Tính tổng của 203 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

**Hd:**

a)  $[(96 - 11) : 5 + 1] \times 2 + [(996 - 101) : 5 + 1] \times 3 + 1 \times 4 = 18 \times 2 + 180 \times 3 + 1 \times 4 = 580.$

Ta có  $18 \times 2 < 124 < 180 \times 3$  nên chữ số thứ 124 thuộc dãy số có ba chữ số 101, 106, ..., 996.

Chữ số thứ 124 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $124 - 18 \times 2 = 88$  của dãy số 101, 106, ..., 996.

Ta có  $88 : 3 = 29$  (dư 1) nên chữ số thứ 88 dãy số 101, 106, ..., 996 là chữ số thứ 1 của số hạng thứ 30 của dãy số 101, 106, ..., 996. Số hạng thứ 30 là  $(30 - 1) \times 5 + 101 = 246$ . Vậy chữ số cần tìm là chữ số 2.

b) Số hạng thứ 203 là  $(203 - 1) \times 5 + 11 = 1021.$

Tổng là  $(11 + 1021) \times 203 : 2 = 104748.$

**Bài 9:**

Cho dãy số 2, 5, 8, 11, ..., 2009.

- a) Dãy này có bao nhiêu số hạng? Số hạng thứ 99 là số hạng nào?  
 b) Chữ số thứ 50 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Số các số hạng:  $(2009 - 2) : 3 + 1 = 670.$

Số hạng thứ 99 là:  $(99 - 1) \times 3 + 2 = 296.$

b) Dãy số 2, 5, 8 có 3 chữ số. Dãy số 11, 14, 17, ..., 98 có  $[(98 - 11) : 3 + 1] \times 2 = 60$  chữ số. Có  $3 < 50 < 60$  nên chữ số thứ 50 của dãy số đã cho thuộc dãy số 11, 14, 17, ..., 98.

Chữ số thứ 50 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $50 - 3 = 47$  của dãy số 11, 14, 17, ..., 98.

Ta có  $47 : 2 = 23$  (dư 1) nên chữ số thứ 47 dãy số 11, 14, 17, ..., 98 là chữ số thứ 1 của số hạng thứ 24 của dãy số 11, 14, 17, ..., 98. Số hạng thứ 24 là  $(24 - 1) \times 3 + 11 = 80$ . Vậy chữ số cần tìm là chữ số 8.

**Bài 10:**

Cho dãy số 1, 5, 9, 13, ...

- a) Chữ số thứ 135 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?  
 b) Tính tổng của 200 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

**Hd:**

a) Dãy số 1, 5, 9, 13, 17, 21, ..., 97 có  $3 + [(97 - 13) : 4 + 1] \times 2 = 47$  chữ số. Dãy số 101, 105, 109, ..., 997 có  $[(997 - 101) : 4 + 1] \times 3 = 675$  chữ số. Vì  $47 < 135 < 675$  nên chữ số thứ 135 phải nằm trong dãy số 101, 105, ..., 997.

Chữ số thứ 135 của dãy số 101, 105, ..., 997 là chữ số thứ  $135 - 47 = 88$  của dãy số 101, 105, ..., 997.



Ta có:  $88 : 3 = 29$  (dư 1) nên chữ số thứ 88 dãy số 101, 105, ..., 997 là chữ số thứ 1 của số hạng thứ 30 của dãy số 101, 105, ..., 997. Số hạng thứ 30 là  $(30 - 1) \times 4 + 101 = 217$ . Vậy chữ số cần tìm là chữ số 2.

b) Số hạng thứ 200 là  $(200 - 1) \times 4 + 1 = 797$ .

Tổng là  $(1 + 797) \times 200 : 2 = 79800$ .

### **Bài 11:**

Cho dãy số 5, 8, 11, ...

a) Tính tổng của 205 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho?

b) Chữ số thứ 135 được dùng để viết dãy số đã cho là chữ số nào?

**Hd:**

a) Số hạng thứ 204 trong dãy số là:  $[(204 - 1) \times 3] + 5 = 620$

Tổng của 204 số hạng đầu của dãy:  $(620 + 5) \times 102 = 62500 + 1250 = 63750$

Tổng của 204 số hạng đầu của dãy:  $63750 + 623 = 64373$

b) Số có 1 chữ số trong dãy là:  $(8 - 5) : 3 + 1 = 2$

Số có 2 chữ số trong dãy là:  $(98 - 11) : 3 + 1 = 30$

Số có 3 chữ số trong dãy là:  $(998 - 111) : 3 + 1 = 330$

Ta có  $2 \times 1 + 30 \times 2 < 135 < 330 \times 3$  nên chữ số thứ 135 thuộc dãy số có ba chữ số 101, 104, ..., 998.

Chữ số thứ 135 của dãy số đã cho là chữ số thứ  $135 - 30 \times 2 - 2 = 63$  của dãy số 101, 104, ..., 998.

Ta có  $63 : 3 = 21$  (dư 0) nên chữ số thứ 63 dãy số 101, 104, ..., 998 là chữ số thứ 3 của số hạng thứ 21 của dãy số 101, 104, ..., 998. Số hạng thứ 21 là  $(21 - 1) \times 3 + 101 = 161$ . Vậy chữ số cần tìm là chữ số 1

### **Bài 12:**

Tính tổng  $S = 10, 11 + 11, 12 + 12, 13 + \dots + 98, 99 + 99, 100$

**Hd:**

$S = (10 + 11 + 12 + \dots + 98 + 99) + (0, 10 + 0, 11 + 0, 12 + \dots + 0, 98 + 0, 99)$

$= [(99 \times 100) : 2 - (9 \times 10) : 2] + [(99 \times 100) : 2 - (9 \times 10) : 2 : 100]$

$= \quad \quad \quad 4905 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 49, 05$

$= 4954, 05$

### **Bài 13:**

Tính tổng  $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 1000 + 1001$

**Hd:**

$S = 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \dots + (1001 - 1000)$

$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1$

$= 1 + [(1001 - 2) : 1 + 1] : 2 = 501$

### **Bài 14:**

Cho dãy số  $\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 7, 10\frac{1}{3}, \dots$

a) Xác định số hạng thứ 2009 của dãy số đã cho?

b) Trong 2009 số hạng đầu của dãy có bao nhiêu số tự nhiên? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó?

**Hd:**

a) Ta thấy dãy số trên là dãy số cách đều với khoảng cách  $d = \frac{10}{3}$

Vậy số hạng thứ 2009 trong dãy số trên là:  $(2009 - 1) \times \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{20081}{3}$

b) Số hạng thứ 2007 trong dãy số trên là:  $(2007 - 1) \times \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = 669$

Dãy số tự nhiên có trong 2009 số hạng đầu của dãy là: 7, 17, 27, ..., 669

Từ đây dễ dàng suy ra kết quả với dãy số tự nhiên cách đều

**Bài 15:**

a) Tìm x biết:

$$(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$$

b) Tính tổng:

$$S = 9, 8 + 8, 7 + \dots + 2, 1 - 1, 2 - 2, 3 - \dots - 7, 8 - 8, 9$$

**Hd:**

a) Ta có:

$$x + 1 + x + 4 + x + 7 + \dots + x + 28 = 155$$

$$(x + x + \dots + x) + (1 + 4 + 7 + \dots + 28) = 155$$

$$10 \times x + 145 = 155$$

$$x = 1$$

b) Ta có:

$$S = 9, 8 + 8, 7 + \dots + 2, 1 - 1, 2 - 2, 3 - \dots - 7, 8 - 8, 9$$

$$= (2, 1 - 1, 2) + (3, 2 - 2, 3) + \dots + (8, 7 - 7, 8) + (9, 8 - 8, 9)$$

$$= 1, 1 \times 8 = 8, 8$$

### § 3. TOÁN VỀ TUỔI

#### **Bài 1:**

Năm nay, tuổi cô gấp 8 lần tuổi cháu. Mười hai năm sau, tuổi cô gấp 2, 4 lần tuổi cháu. Tính tuổi của hai cô cháu hiện

nay.

**Hd:**

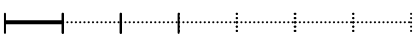
Hiệu số tuổi của hai cô cháu hiện nay là:  $8 - 1 = 7$  (lần tuổi cháu hiện nay)


Hiệu số tuổi của hai cô cháu khi tuổi cô gấp 2, 4 lần tuổi cháu là  $2, 4 - 1 = 1, 4$  (lần tuổi cháu lúc đó)

Vì hiệu số tuổi của 2 cô cháu không thay đổi theo thời gian nên: 7 lần tuổi cháu hiện nay = 1, 4 lần tuổi cháu lúc đó.

Hay cách khác: 1 lần tuổi cháu hiện nay = 0, 2 lần tuổi cháu lúc đó

Ta có sơ đồ:

Tuổi cháu hiện nay: 

Tuổi cháu sau 12 năm: 

Tuổi cháu hiện nay là  $12 : (5 - 1) \times 1 = 3$  (tuổi)

Tuổi cô hiện nay là  $3 \times 8 = 24$  (tuổi)

#### **Bài 2:**

Hiện nay tuổi cha gấp 5 lần tuổi con. Trước đây 6 năm tuổi cha gấp 17 lần tuổi con. Tính tuổi của cha và của con hiện nay.

**Hd:**

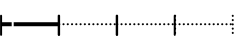
Hiệu số tuổi của hai cha con hiện nay là:  $5 - 1 = 4$  (lần tuổi con hiện nay)

Hiệu số tuổi của hai cha con khi tuổi cha gấp 17 lần tuổi con là  $17 - 1 = 16$  (lần tuổi con lúc đó)

Vì hiệu số tuổi của 2 cha con không thay đổi theo thời gian nên: 4 lần tuổi con hiện nay = 16 lần tuổi con khi đó.

Hay cách khác: 1 lần tuổi con hiện nay = 4 lần tuổi con lúc đó

Ta có sơ đồ:

Tuổi con trước 6 năm: 

Tuổi con hiện nay: 

Tuổi con hiện nay là:  $6 : (4 - 1) \times 4 = 8$  (tuổi)

Tuổi cô hiện nay là:  $8 \times 5 = 40$  (tuổi)

#### **Bài 3:**

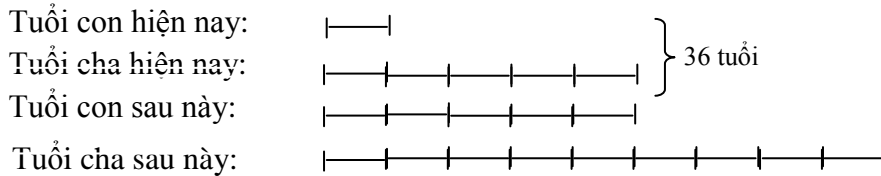
Năm nay tuổi của 2 cha con cộng lại bằng 36. Đến khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì tuổi con bằng  $\frac{5}{9}$  tuổi cha lúc đó. Tìm tuổi 2 cha con hiện nay.

**Hd:**

Nếu coi tuổi con sau này là 5 phần thì tuổi cha sau này là 9 phần như thế. Khi đó hiệu số tuổi của 2 cha con là  $9 - 5 = 4$  (phần)

Vì hiện nay tuổi cha bằng tuổi con sau này nên hiện nay tuổi cha chiếm 5 phần mà hiệu số tuổi của 2 cha con không thay đổi theo thời gian (hiệu là 4 phần) nên số phần tuổi con là  $5 - 4 = 1$  (phần). Do đó hiện nay số phần tuổi của 2 cha con là  $5 + 1 = 6$  (phần)

Ta có sơ đồ:



Vậy tuổi con hiện nay là  $36 : 6 = 6$  (tuổi).

Tuổi cha hiện nay là  $36 - 6 = 30$  (tuổi).

#### **Bài 4:**

Năm nay, tuổi bố gấp 2,2 lần tuổi con. Hai mươi lăm năm về trước, tuổi bố gấp 8,2 lần tuổi con. Hỏi khi tuổi bố gấp 3 lần tuổi con thì con bao nhiêu tuổi?

**Hd:**

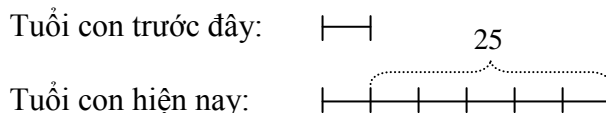
Tuổi bố hiện nay hơn tuổi con số lần là:  $2,2 - 1 = 1,2$  (lần tuổi con hiện nay).

Tuổi bố cách đây 25 năm hơn tuổi con số lần là  $8,2 - 1 = 7,2$  (lần tuổi con lúc đó).

Vậy ta suy ra:  $1,2$  lần tuổi con hiện nay =  $7,2$  lần tuổi con lúc đó.

Tuổi con hiện nay gấp tuổi con 25 năm trước số lần là:  $7,2 : 1,2 = 6$  (lần).

Ta có sơ đồ:



Tuổi con hiện nay là:  $25 : (6 - 1) \times 6 = 30$  (tuổi).

Tuổi bố hiện nay là:  $30 \times 2,2 = 66$  (tuổi).

Hiệu số tuổi của 2 bố con hiện nay là:  $66 - 30 = 36$  (tuổi)

Ta có hiệu số tuổi của 2 bố con khi tuổi bố gấp 3 lần tuổi con là 2 lần tuổi con khi đó. Do đó 2 lần tuổi con sau này = 36 tuổi

Vậy tuổi con khi đó là:  $36 : 2 = 18$  (tuổi)

#### **Bài 5:**

Hiện nay tuổi cha gấp 4 lần tuổi con. Trước đây 6 năm tuổi cha gấp 13 lần tuổi con. Tính tuổi của cha và của con hiện nay

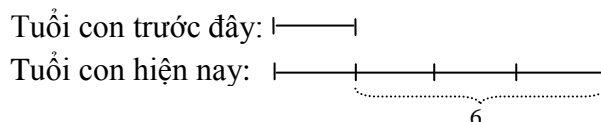
**Hd:**

Ta có: Hiệu số tuổi của 2 cha con hiện nay là 3 lần tuổi con hiện nay

Hiệu số tuổi của 2 cha con trước đây 6 năm là 12 lần tuổi con khi đó

Vậy: 3 lần tuổi con hiện nay = 12 lần tuổi con trước đây.

Ta có sơ đồ:



Tuổi con trước đây là  $6 : (4 - 1) \times 1 = 2$  (tuổi)

Tuổi con hiện nay là:  $2 + 6 = 8$  (tuổi)

Tuổi cha hiện nay là :  $8 \times 4 = 32$  (tuổi).

### **Bài 6:**

Tuổi bà năm nay gấp 4,2 lần tuổi cháu. Mười năm về trước, tuổi bà gấp 10,6 lần tuổi cháu. Tính tuổi bà và tuổi cháu hiện nay.

**Hd:**

Vì hiệu số tuổi của hai bà cháu không thay đổi theo thời gian nên 3,2 lần tuổi cháu hiện nay = 9,6 lần tuổi cháu 10 năm trước.

Hay tuổi cháu hiện nay = 3 lần tuổi cháu 10 năm trước.

Vậy tuổi cháu hiện nay là:  $(10 : 2) \times 3 = 15$  (tuổi).

Tuổi bà hiện nay là :  $15 \times 4,2 = 63$  (tuổi)

### **Bài 7:**

Năm nay, tuổi bác gấp 3 lần tuổi cháu. Mười lăm năm về trước, tuổi bác gấp 9 lần tuổi cháu. Hỏi khi tuổi bác gấp 2 lần tuổi cháu thì cháu bao nhiêu tuổi?

**Hd:**

Tuổi bác hiện nay hơn tuổi cháu số lần là:  $3 - 1 = 2$  (lần tuổi cháu hiện nay).

Tuổi bác cách đây 15 năm hơn tuổi cháu số lần là  $9 - 1 = 8$  (lần tuổi cháu lúc đó).

Vậy suy ra: 2 lần tuổi cháu hiện nay = 8 lần tuổi cháu lúc đó.

Hay: 1 lần tuổi cháu hiện nay = 4 lần tuổi cháu lúc đó.

Tuổi cháu hiện nay là:  $15 : (4 - 1) \times 4 = 20$  (tuổi).

Tuổi bác hiện nay là:  $20 \times 3 = 60$  (tuổi).

Khi tuổi bác gấp 2 lần tuổi cháu thì tuổi cháu là:  $40 : 2 \times 1 = 40$  (tuổi).

### **Bài 8:**

Năm nay, tuổi mẹ gấp 2,5 lần tuổi con. Nhưng 6 về trước, tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con. Tính tuổi của 2 mẹ con hiện nay?

**Hd:**

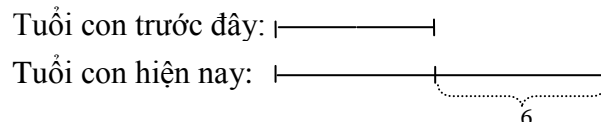
Hiệu số tuổi của 2 mẹ con hiện nay là:  $2,5 - 1,5 = 1,5$  (lần tuổi con hiện nay).

Hiệu số tuổi của 2 mẹ con trước đây 6 năm là:  $4 - 1 = 3$  (lần tuổi con lúc đó).

Vậy suy ra: 1,5 lần tuổi con hiện nay = 3 lần tuổi con trước đây.

Hay: 1 lần tuổi cháu hiện nay = 2 lần tuổi cháu lúc đó.

Ta có sơ đồ:



Tuổi con hiện nay là:  $6 : (2 - 1) \times 2 = 12$  (tuổi).

Tuổi mẹ hiện nay là:  $12 \times 2,5 = 30$  (tuổi).

### **Bài 9:**

Năm nay anh 27 tuổi. Biết rằng năm mà tuổi của anh bằng tuổi của em hiện nay thì tuổi của anh chỉ bằng nửa tuổi của anh khi đó. Tính tuổi của em hiện nay?

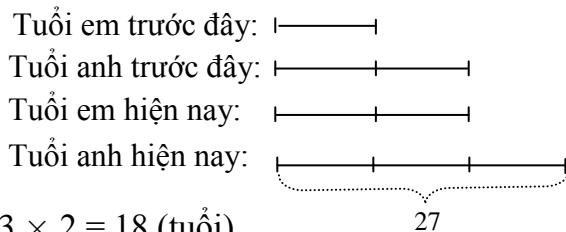
**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Tuổi của anh trước đây gấp 2 lần tuổi của em trước đây

Tuổi của em hiện nay gấp 2 lần tuổi của em trước đây

Hiệu số tuổi của 2 anh em trước đây tuổi bằng 1 lần tuổi của em trước đây. Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi nên suy ra: Tuổi của anh hiện nay gấp  $(2 + 1)$  lần tuổi của em trước đây. Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của em hiện nay là:  $27 : 3 \times 2 = 18$  (tuổi)

**Bài 10:**

Hiện nay tổng số tuổi của 2 anh và em là 20 tuổi. Biết rằng tuổi của em hiện nay gấp 2 lần tuổi của em khi anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi 2 người hiện nay?

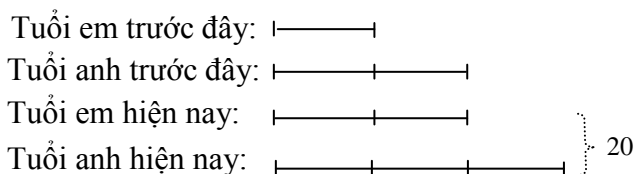
**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Tuổi của em hiện nay gấp 2 lần tuổi của em trước đây

Tuổi của anh trước đây gấp 2 lần tuổi của em trước đây

Hiệu số tuổi của 2 anh em trước đây tuổi bằng 1 lần tuổi của em trước đây. Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi nên suy ra: Tuổi của anh hiện nay gấp  $(2 + 1)$  lần tuổi của em trước đây. Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của em hiện nay là:  $20 : (3 + 2) \times 2 = 8$  (tuổi)

Tuổi của anh hiện nay là:  $20 - 8 = 12$  (tuổi)

**Bài 11:**

Hiện nay tổng số tuổi của 2 anh và em là 15 tuổi. Biết rằng khi tuổi của em bằng tuổi của anh hiện nay thì tuổi của anh gấp 1,5 lần tuổi của em khi đó. Tính tuổi 2 người hiện nay?

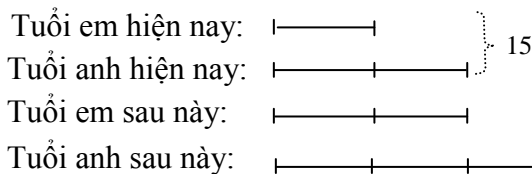
**Hd:**

Theo đề bài ra ta có:

Tuổi của anh sau này gấp 1,5 lần tuổi của em sau này

Tuổi của anh hiện nay bằng tuổi của em sau này

Hiệu số tuổi của 2 anh em sau này tuổi bằng 0,5 lần tuổi của em sau này. Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi nên suy ra: Tuổi của em hiện nay bằng 0,5 lần tuổi của em sau này. Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của em hiện nay là:  $15 : (1 + 2) \times 2 = 6$  (tuổi)

Tuổi của anh hiện nay là:  $15 - 6 = 9$  (tuổi)

**Bài 12:**

Hiện nay An nhiều hơn Bình 14 tuổi. Tính tuổi của 2 người hiện nay, biết rằng khi tuổi của Bình bằng tuổi của An hiện nay thì tuổi của An bằng  $\frac{5}{3}$  lần tuổi của Bình khi đó.

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

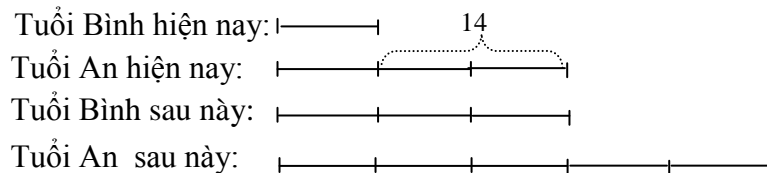
Tuổi của An sau này bằng  $\frac{5}{3}$  lần tuổi của Bình sau này

Hiệu số tuổi của 2 người sau này bằng  $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$  lần tuổi của Bình sau này

Tuổi của An hiện nay bằng 1 lần tuổi của Bình sau này

Suy ta tuổi của Bình hiện nay bằng  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  lần tuổi của Bình sau này

Vậy ta có sơ đồ như sau:



Theo sơ đồ trên ta có:

Tuổi của An hiện nay là:  $14 : (3 - 1) \times 3 = 21$  (tuổi)

Tuổi của Bình hiện nay là:  $14 : (3 - 1) \times 1 = 7$  (tuổi)

### **Bài 13:**

Hiện nay Hùng nhiều hơn Minh 12 tuổi. Tính tuổi của 2 người hiện nay, biết rằng khi tuổi của Minh bằng tuổi của Hùng hiện nay thì tuổi của Minh bằng  $\frac{3}{5}$  lần tuổi của Hùng khi đó.

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

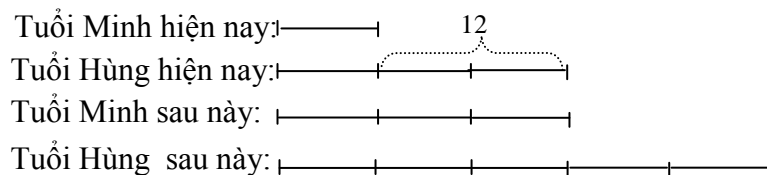
Tuổi của Hùng sau này bằng  $\frac{5}{3}$  lần tuổi của Minh sau này

Hiệu số tuổi của 2 người sau này bằng  $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$  lần tuổi của Minh sau này

Tuổi của Hùng hiện nay bằng 1 lần tuổi của Minh sau này

Suy ta tuổi của Minh hiện nay bằng  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  lần tuổi của Minh sau này

Vậy ta có sơ đồ như sau:



Theo sơ đồ trên ta có:

Tuổi của Hùng hiện nay là:  $12 : (3 - 1) \times 3 = 18$  (tuổi)

Tuổi của Minh hiện nay là:  $12 : (3 - 1) \times 1 = 6$  (tuổi)

### **Bài 14:**

Hiện nay tuổi của bố gấp 4 lần tuổi của con và tổng số tuổi của 2 bố con là 50 tuổi. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa tuổi bố gấp 2 lần tuổi con?

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Tuổi của bố hiện nay là:  $50 : (4 + 1) \times 4 = 40$  (tuổi)

Tuổi của con hiện nay là:  $50 : (4 + 1) \times 1 = 10$  (tuổi)

Hiệu số tuổi của 2 bố con hiện nay là  $40 - 10 = 30$  (tuổi)

Hiệu số tuổi của 2 bố con sau này bằng 1 lần tuổi của con sau này  
 Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi theo thời gian nên suy ra: 1 lần tuổi của con sau này bằng 30 tuổi. Do đó có sơ đồ về mối quan hệ giữa tuổi con hiện nay và sau này như sau:  
 Tuổi của con hiện nay là:  $20 : (3 - 1) \times 1 = 10$  (tuổi)  
 Vậy số năm sau đó để tuổi bố gấp 2 lần tuổi con là:  $30 - 10 = 20$  (năm)

### **Bài 15:**

Hiện nay tuổi của bố gấp 4 lần tuổi của con và sau 20 năm nữa tuổi của bố gấp 2 lần tuổi con. Tính tuổi của hai bố con hiện nay?

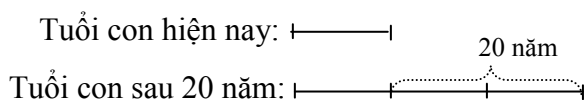
**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Hiệu số tuổi của 2 bố con hiện nay bằng 3 lần tuổi của con hiện nay

Hiệu số tuổi của 2 bố con sau 20 năm bằng 1 lần tuổi của con khi đó

Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi theo thời gian nên suy ra: 3 lần tuổi của con hiện nay bằng 1 lần tuổi của con sau 20 năm. Do đó có sơ đồ về mối quan hệ giữa tuổi con hiện nay và sau này như sau:



Tuổi của con hiện nay là:  $20 : (3 - 1) \times 1 = 10$  (tuổi)

Tuổi của bố hiện nay là:  $10 \times 4 = 40$  (tuổi)

### **Bài 16:**

Hiện nay tổng số tuổi của 2 bố con là 50 tuổi gấp và biết rằng sau 20 năm nữa tuổi của bố gấp 2 lần tuổi con. Tính tuổi của hai bố con hiện nay?

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Tổng số tuổi của 2 bố con hiện nay bằng 50 tuổi

Vậy tổng số tuổi của 2 bố con sau 20 năm là:

$$2 \times 20 + 50 = 90 \text{ (tuổi)}$$

Mà sau 20 năm tuổi bố gấp 2 lần tuổi con. Như vậy ta đã đưa bài toán về dạng toán tìm 2 số khi biết tổng bằng 90 và tỷ số là  $\frac{1}{2}$ . Do đó ta tính được tuổi con sau 20 năm như sau:

Tuổi của con sau 20 năm là:

$$90 \text{ tuổi} : (2 + 1) \times 1 = 30 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi của con hiện nay là:  $30 - 20 = 10$  (tuổi)

Tuổi của bố hiện nay là:  $50 - 10 = 40$  (tuổi)

### **Bài 17:**

Hiện nay chị hơn em 7 tuổi. Biết rằng khi tuổi của em bằng tuổi của chị hiện nay thì tuổi của chị gấp 1,5 lần tuổi của em khi đó. Tính tuổi 2 người hiện nay?

**Hd:**

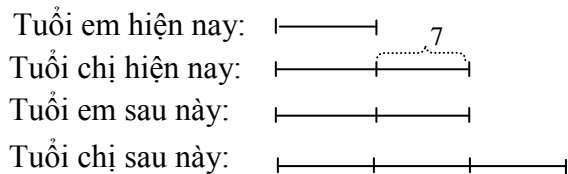
Theo bài ra ta có:

Tuổi của chị sau này gấp 1,5 lần tuổi của em sau này

Tuổi của chị hiện nay bằng tuổi của em sau này



Hiệu số tuổi của 2 chị em sau này tuổi bằng 0,5 lần tuổi của em sau này. Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi, nên suy ra: Tuổi của em hiện nay bằng 0,5 lần tuổi của em sau này. Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của em hiện nay là:  $7 : (2 - 1) \times 1 = 7$  (tuổi)

Tuổi của anh hiện nay là:  $7 + 7 = 14$  (tuổi)

**Bài 18:**

Năm nay chị 25 tuổi. Biết rằng năm mà tuổi của chị bằng tuổi của em hiện nay thì tuổi của em chỉ bằng  $\frac{1}{3}$  tuổi của chị khi đó. Tính tuổi của em hiện nay?

**Hd:**

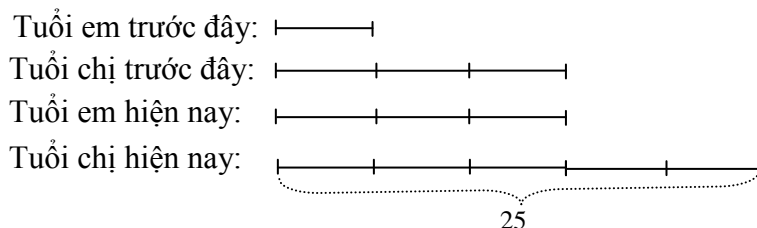
Theo bài ra ta có:

Tuổi của chị trước đây gấp 3 lần tuổi của em trước đây

Tuổi của em hiện nay gấp 3 lần tuổi của em trước đây

Hiệu số tuổi của 2 chị em trước đây tuổi bằng 2 lần tuổi của em trước đây. Mà hiệu số tuổi của 2 người không đổi nên suy ra: Tuổi của chị hiện nay gấp  $(3 + 2)$  lần tuổi của em trước đây.

Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của em hiện nay là:  $25 : 5 \times 3 = 15$  (tuổi)

**Bài 19:**

Năm nay em 4 tuổi. Biết rằng năm mà tuổi của em bằng tuổi của chị hiện nay thì tuổi của em chỉ bằng  $\frac{3}{5}$  tuổi của chị khi đó. Tính tuổi của chị hiện nay?

**Hd:**

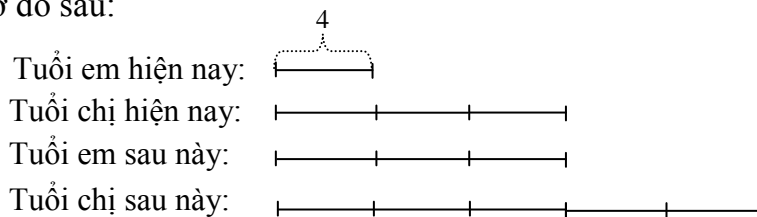
Theo bài ra ta có:

Tuổi của chị sau này bằng  $\frac{5}{3}$  lần tuổi của em sau này

Tuổi của chị hiện nay bằng 1 lần tuổi của em sau này

Hiệu số tuổi của 2 chị em sau này tuổi bằng  $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$  lần tuổi của em sau này. Mà hiệu

số tuổi của 2 người không đổi nên suy ra: Tuổi của em hiện nay bằng  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  lần tuổi của em sau này. Do đó có sơ đồ sau:



Tuổi của chị hiện nay là:  $4 : \frac{1}{3} = 12$  (tuổi)

**Bài 20:**

Hiện nay chị hơn em 6 tuổi. Biết rằng khi tuổi của em bằng tuổi của chị hiện nay thì tuổi của chị gấp 3 lần tuổi của em hiện nay. Tính tuổi 2 người hiện nay?

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Tuổi chị hiện nay bằng tuổi em sau này.

Hiệu số tuổi của 2 chị em hiện nay và sau này đều bằng 6 tuổi.

Do đó suy ra: 
$$\begin{cases} \text{Tuổi của em hiện nay} + 6 \text{ tuổi} = \text{Tuổi của em sau này} \\ \text{Tuổi của em sau này} + 6 \text{ tuổi} = \text{Tuổi của chị sau này} \end{cases}$$

Suy ra: Tuổi của em hiện nay + 12 tuổi = Tuổi của chị sau này

Mà ta biết rằng: Tuổi của chị sau này gấp 3 lần tuổi em hiện nay.

Vậy suy ra: Tuổi của em hiện nay + 12 tuổi = 3 × Tuổi của em hiện nay

⇒ 2 × Tuổi của em hiện nay = 12 (tuổi)

⇒ Tuổi của em hiện nay là:  $12 : 2 = 6$  (tuổi)

Tuổi của chị hiện nay là:  $6 + 6 = 12$  (tuổi)

**Bài 21:**

Tính tuổi của hai anh em hiện nay. Biết rằng 62,5% tuổi anh hơn 75% tuổi em là 2 tuổi và 50% tuổi anh hơn 37,5% tuổi em là 7 tuổi

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

50% tuổi anh hơn 37,5% tuổi em là 7 tuổi

⇒ 100% tuổi anh hơn 75% tuổi em là 14 tuổi

Mà 62,5% tuổi anh hơn 75% tuổi em là 2 tuổi

⇒  $100\% - 62,5\% = 37,5\%$  tuổi anh là  $14 - 2 = 12$  tuổi

Vậy tuổi anh là:  $12 : 37,5 \times 100 = 32$  (tuổi)

75% tuổi em hiện nay là:  $32 - 14 = 18$  (tuổi)

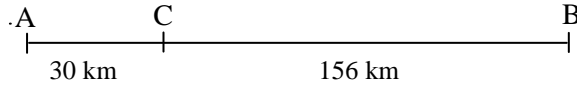
Tuổi em hiện nay là:  $18 : 75 \times 100 = 24$  (tuổi)

## § 4. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU

### **Bài 1:**

Hai thành phố cách nhau 186 km. Lúc 6 giờ một người đi xe máy từ A với vận tốc 30 km/giờ về B, lúc 7 giờ một người đi xe máy từ B với vận tốc 35 km/giờ về A. Hỏi lúc mấy giờ thì hai người gặp nhau và chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

**Hd:**



Khi người thứ 2 xuất phát thì người thứ nhất cách B là  $186 - 30 = 156$  (km).

Quãng đường 2 người đi được trong 1 giờ là  $30 + 35 = 65$  (km).

Thời gian để 2 người gặp nhau là  $156 : 65 = 2\frac{2}{5}$  (h) = 2<sup>h</sup> 24 phút.

$7^h + 2^h 24 = 9^h 24$ . Vậy hai người gặp nhau lúc 9 giờ 24 phút.

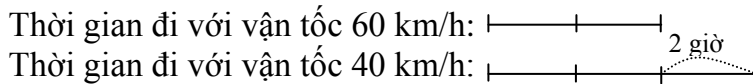
Quãng đường từ A đến địa điểm gặp nhau là  $30 + 2\frac{2}{5} \times 30 = 102$  (km).

### **Bài 2:**

Một ô tô chạy từ A đến B. Nếu chạy mỗi giờ 60 km thì ô tô sẽ đến B lúc 14 giờ. Nếu chạy mỗi giờ 40 km thì ô tô sẽ đến B lúc 16 giờ. Hãy tính quãng đường AB và tìm xem trung bình mỗi giờ ô tô phải chạy bao nhiêu km để đến B lúc 15 giờ?

**Hd:**

Do trên cùng một quãng đường vận tốc tăng lên bao nhiêu lần thì thời gian giảm đi bấy nhiêu lần nên ta có: Thời gian đi với vận tốc 40 km/h gấp 1,5 lần thời gian đi với vận tốc 60 km/h. Ta có sơ đồ sau:



Quãng đường AB dài là  $60 \times 2 \times 1,5 = 240$  (km).

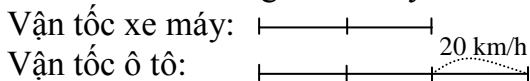
Để đến B lúc 15 giờ, mỗi ô tô phải chạy  $240 : 5 = 48$  (km)

### **Bài 3:**

Một ô tô chạy từ A đến B mất 2 giờ. Một xe máy chạy từ B đến A mất 3 giờ. Hãy tính quãng đường AB, biết vận tốc của ô tô hơn vận tốc của xe máy là 20 km/giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại cùng một địa điểm cách A bao nhiêu km?

**Hd:**

Tỉ số thời gian của ô tô và xe máy là  $\frac{2}{3}$ . Do trên cùng một quãng đường thời gian tăng lên bao nhiêu lần thì vận tốc giảm đi bấy nhiêu lần nên ta có sơ đồ:



Vận tốc ô tô là :  $20 \times 3 = 60$  (km/giờ).

Vận tốc xe máy là  $60 - 20 = 40$  (km/giờ).

Quãng đường AB là  $60 \times 2 = 120$  (km).

Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì sẽ gặp nhau sau một thời gian là

$$120 : (60 + 40) = 1,2 \text{ (giờ)}$$

Địa điểm gặp nhau cách A là  $60 \times 1,2 = 70$  (km).

**Bài 4:**

Một ô tô chạy từ A đến B. Nếu chạy mỗi giờ 55 km thì ô tô sẽ đến B lúc 15 giờ. Nếu chạy mỗi giờ 45 km thì ô tô sẽ đến B lúc 17 giờ. Hãy tính quãng đường AB và tìm xem trung bình mỗi giờ ô tô phải chạy bao nhiêu km để đến B lúc 16 giờ?

**Hd:**

Tỉ số vận tốc của ô tô và xe máy đi trên quãng đường AB là  $\frac{55}{45} = \frac{11}{9}$ . Do trên cùng một quãng đường vận tốc tăng lên bao nhiêu lần thì thời gian giảm đi bấy nhiêu lần nên ta có: Thời gian đi với vận tốc 45 km/h bằng  $\frac{11}{9}$  lần thời gian đi với vận tốc 55 km/h. Do đó ta có sơ đồ:

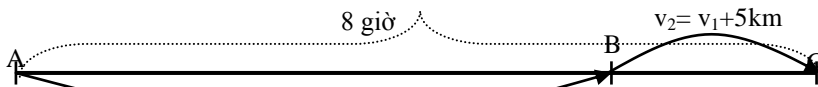
Thời gian đi với vận tốc 55 km/h: |-----| 2 giờ  
 Thời gian đi với vận tốc 45 km/h: |-----|

Quãng đường AB dài là  $55 \times (2 : 2) \times 9 = 495$  (km).

Để đến B lúc 15 giờ, mỗi ô tô phải chạy  $495 : 10 = 49,5$  (km).

**Bài 5:**

Một ô tô đi từ A qua B đến C hết 8 giờ. Thời gian đi từ A đến B gấp 3 lần đi từ B đến C và quãng đường từ A đến B dài hơn từ B đến C là 130 km. Biết rằng muốn đi được đúng thời gian đã định, từ B đến C ô tô phải tăng vận tốc thêm 5 km một giờ. Hỏi quãng đường BC dài bao nhiêu km?

**Hd:**

Theo bài ra ta có: Trên quãng đường  $AB = BC + 130$  km ô tô đi với vận tốc  $v_1$  trong 6 giờ, còn trên quãng đường BC ô tô đi với vận tốc  $v_2$  trong 2 giờ.

Do đó suy ra ô tô đi với vận tốc  $v_1$  trong 2 giờ đi được quãng đường bằng quãng đường BC bớt đi là:  $5 \times 2 = 10$  km

Vậy ô tô đi với vận tốc  $v_1$  trong 4 giờ đi được quãng đường tương ứng là:

$$130 + 10 = 140 \text{ (km)}.$$

Vận tốc ban đầu của ô tô là:  $140 : 4 = 35$  (km/h)

Quãng đường BC là 80 km.

**Bài 6:**

Lúc 5 giờ 30 phút, một người đi xe máy khởi hành từ tỉnh A với vận tốc 40km/giờ và đến tỉnh B lúc 8 giờ 15 phút, người đó nghỉ lại tỉnh B là 30 phút rồi quay về tỉnh A với vận tốc cũ. Lúc 7 giờ 45 phút một người khác đi xe đạp khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 10km/giờ. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ và chỗ gặp nhau cách tỉnh B bao nhiêu km?

**Hd:**

Thời gian người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B là:

$$8 \text{ giờ } 15 \text{ phút} - 5 \text{ giờ } 30 \text{ phút} = 2 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = 2,75 \text{ giờ}.$$

Quãng đường từ A đến B là:  $40 \times 2,75 = 110$  (km)

Người đi xe máy rời tỉnh B lúc 8 giờ 15 phút + 30 phút = 8 giờ 45 phút

Thời gian người đi xe đạp đi từ 7 giờ 45 phút đến 8 giờ 45 phút là:

$$8 \text{ giờ } 45 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = 1 \text{ giờ}.$$

Đến 8 giờ 45 phút người đi xe đạp đã đi được 10km.

Lúc 8 giờ 45 phút hai người cách nhau là  $110 - 10 = 100$  (km).

Thời gian hai người gặp nhau là:  $100 : (40 + 10) = 2$  (giờ)  
Hai người gặp nhau lúc 8 giờ 45 phút + 2 = 10 giờ 45 phút.  
Chỗ gặp nhau cách B là:  $40 \times 2 = 80$  (km).

### **Bài 7:**

Xe thứ nhất đi từ A đến B hết 3 giờ 20 phút. Xe thứ hai đi từ B đến A hết 2 giờ 48 phút. Biết rằng hai xe cùng khởi hành và sau 1 giờ 15 phút thì chúng còn cách nhau 25 km. Tính vận tốc mỗi xe.

**Hd:**

Đổi đơn vị thời gian: 3 giờ 20 phút = 200 phút =  $\frac{10}{3}$  giờ; 2 giờ 48 phút = 168 phút =  $\frac{14}{5}$  giờ; 1 giờ 15 phút = 75 phút;

+ Tính phân số chỉ phần đường đi được sau 75 phút của hai xe là:

$$\frac{75}{200} + \frac{75}{168} = \frac{3}{8} + \frac{25}{56} = \frac{23}{28} \text{ (quãng đường AB).}$$

+ Tính phân số chỉ phần đường còn lại là  $\frac{28}{28} - \frac{23}{28} = \frac{5}{28}$  (quãng đường AB).

+ Vì  $\frac{5}{28}$  quãng đường AB biểu thị 25km nên quãng đường AB dài là:

$$25 : 5 \times 28 = 140 \text{ (km).}$$

+ Vận tốc của xe thứ nhất là  $140 : \frac{10}{3} = 42 \text{ (km/h)}$ .

+ Vận tốc của xe thứ hai là  $140 : \frac{14}{5} = 50 \text{ (km/h)}$ .

### **Bài 8:**

Hai bạn Việt và Nam đi xe đạp xuất phát cùng lúc từ A đến B, Việt đi với vận tốc 12 km/giờ, Nam đi với vận tốc 10 km/giờ. Đi được 1,5 giờ, để đợi Nam, Việt đã giảm vận tốc xuống còn 7 km/giờ. Tính quãng đường AB, biết rằng lúc gặp nhau cũng là lúc Việt và Nam cùng đến B.

**Hd:**

Sau 1,5 giờ Việt cách xa Nam là  $12 \times 1,5 - 10 \times 1,5 = 18 - 15 = 3$  (km).

Lúc đó Việt đi với vận tốc 7 km/giờ và Nam đi với vận tốc 10 km/giờ nên thời gian chuyển động để Nam đuổi kịp Việt là  $3 : (10 - 7) = 1$  (giờ).

Quãng đường AB dài là  $18 + 7 \times 1 = 25$  (km).

**Bài 9:** Một ca nô xuôi một khúc sông hết 3 giờ và ngược khúc sông đó hết 5 giờ. Tính chiều dài khúc sông, biết vận tốc dòng nước là 50 m/ph.

**Hd:**

Ta thấy: Mỗi giờ ca nô xuôi dòng được  $\frac{1}{3}$  khúc sông và mỗi giờ ca nô ngược dòng được  $\frac{1}{5}$  khúc sông. Mỗi giờ dòng nước xuôi được  $(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) : 2 = \frac{1}{15}$  (khúc sông)

Thời gian dòng nước xuôi từ A đến B là  $1 : \frac{1}{15} = 15$  (giờ)

Vì 50m/ph = 3km/h nên khúc sông dài là  $3 \times 15 = 45$ (km).

### **Bài 10:**

Một đoàn tàu chạy ngang qua một cột điện hết 10 giây. Cùng với vận tốc đó, đoàn tàu chạy ngang qua một đường hầm dài 210 m hết 52 giây. Tính chiều dài và vận tốc tàu.

**Hd:**

Trong khoảng thời gian 10 giây tàu đi được quãng đường là chiều dài tàu

Trong khoảng thời gian 52 giây tàu đi được quãng đường là chiều dài tàu cộng với chiều dài hầm(210 m).

Vậy thời gian để tàu đi được quãng đường 210 m là:

$$52 - 8 = 42 \text{ (giây).}$$

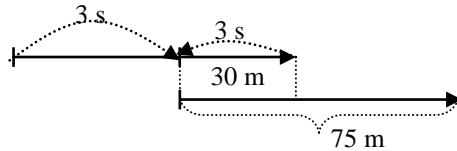
Vận tốc tàu là:  $210 : 42 = 5 \text{ (m/s)} (= 18 \text{ km/h})$

Chiều dài đoàn tàu là:  $5 \times 10 = 40 \text{ (m).}$

**Bài 11:**

Một hành khách ngồi trên một chiếc xe lửa đang chạy với vận tốc 36km/h nhìn thấy một chiếc xe lửa tốc hành dài 75 mét đi ngược chiều qua mặt mình hết 3 giây. Tính vận tốc của xe lửa tốc hành.

**Hd:**



Đổi đơn vị:  $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

Trong khoảng thời gian 3 giây người ngồi trên xe lửa đi được quãng đường là:

$$10 \times 3 = 30 \text{ (m)}$$

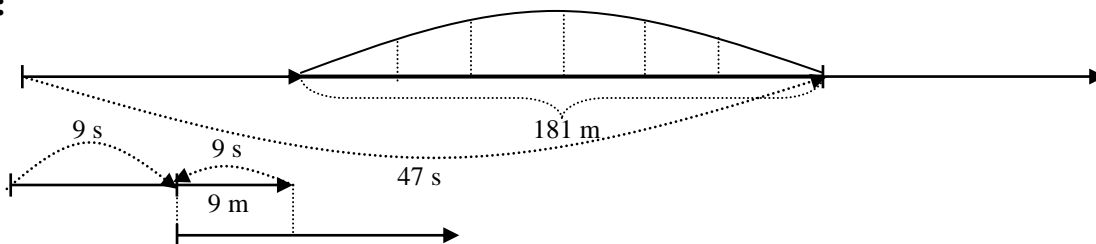
Trong khoảng thời gian 3 giây xe lửa tốc hành đi được quãng đường là chiều dài tàu trừ đi 30 m. Vậy vận tốc của xe lửa tốc hành là:

$$(75 - 30) : 3 = 15 \text{ (m/s)} = 54 \text{ (km/h)}$$

**Bài 12:**

Một xe lửa chạy qua một cầu dài 181 mét hết 47 giây. Biết cùng vận tốc ấy xe lửa lướt qua một người đi bộ ngược chiều trong 9 giây. Tính vận tốc và chiều dài xe lửa, biết vận tốc người đi bộ là 1 m/s.

**Hd:**



Trong khoảng thời gian 47 giây xe lửa đi được quãng đường là chiều dài xe lửa cộng chiều dài cầu (181m)

Trong khoảng thời gian 9 giây xe lửa đi được quãng đường là chiều dài tàu bớt đi 9 m, tức là nếu thêm vào 9 m thì xe lửa đi được quãng đường là chiều dài xe lửa.

Vậy thời gian để tàu đi được quãng đường  $(181 + 9) = 190 \text{ m}$  là:  $47 - 9 = 38 \text{ (s)}$

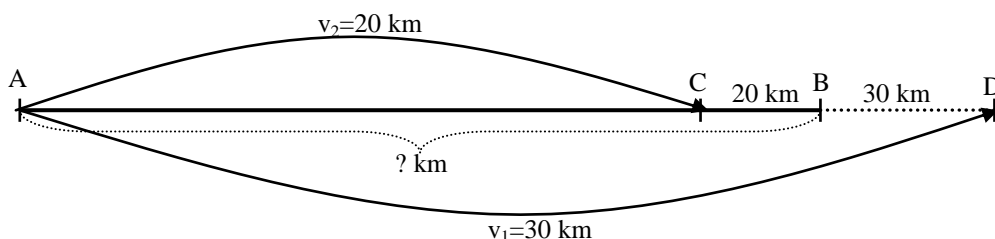
Vận tốc của xe lửa là:  $190 : 38 = 5 \text{ (m/s)} = 18 \text{ (km/h)}$

Chiều dài của xe lửa là:  $5 \times 9 = 45 \text{ (m)}$

**Bài 13:**

Một người đi xe máy từ A tới B hết một khoảng thời gian dự định nào đó. Biết rằng nếu đi với vận tốc 30 km/h thì đến B sớm 1 giờ, nếu đi với vận tốc 20 km/h thì đến B chậm 1 giờ. Tính quãng đường AB?

**Hd:**



Trên cùng quãng đường AB ta có thời gian tỷ lệ nghịch với vận tốc:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{20}{30}$$

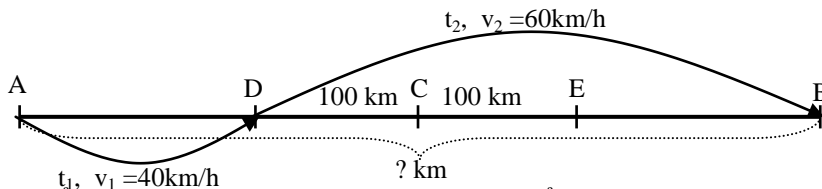
Mà dễ thấy:  $t_2 - t_1 = 2$  (h). Đến đây đưa về bài toán tìm 2 số có tỷ số là  $\frac{2}{3}$  và có hiệu bằng 2.

Suy ra được quãng đường AB là: 120 km.

#### **Bài 14:**

Một ô tô đi từ thành phố A tới thành phố B hết 10 giờ. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc 40 km/h, khi tới vị trí còn cách 100 km nữa được nửa quãng đường thì ô tô tăng vận tốc lên thành 60 km/h để về đến B đúng hẹn. Tính vận tốc trung bình của ô tô đi từ A tới B?

**Hd:**



Gọi C là điểm giữa quãng đường AB, D là điểm thuộc đoạn AC sao cho  $DC = 100$  km. Lấy điểm E thuộc đoạn CB sao cho  $CE = 100$  km.

Dễ dàng suy ra  $AD = EB$ . Trên 2 quãng đường bằng nhau này ta có thời gian tỷ lệ nghịch với vận tốc, tức là:  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{40}$

Mà dễ thấy:  $t_1 + t_2 = \frac{200}{60}$ . Từ đây dễ dàng tính được  $t_1, t_2$ , suy ra quãng đường AD và quãng đường AB bằng 520 km.

#### **Bài 15:**

Hai vòi nước cùng chảy vào 1 bể không chứa nước sau 12 giờ đầy bể. Biết rằng lượng nước mỗi giờ vòi 1 chảy vào bể bằng 1,5 lần lượng nước vòi 2 chảy vào bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu sẽ đầy bể?

**Hd:**

Theo bài ra ta có:  $v_1 = 1,5 \times v_2$

$$v_1 + v_2 = \frac{1}{12}$$

Từ đây dễ dàng tính được  $v_1 = \frac{1}{20}$  (bể) và  $v_2 = \frac{1}{30}$  (bể)

Vậy suy ra vòi 1 chảy một mình trong 20 giờ sẽ đầy bể, vòi 2 chảy một mình trong 30 giờ sẽ đầy bể.

#### **Bài 16:**

Một vòi nước chảy vào 1 bể không chứa nước, cùng lúc đó có vòi chảy ra. Biết rằng lượng nước mỗi giờ vòi chảy ra bằng  $\frac{4}{5}$  lần lượng nước vòi chảy vào bể và sau 5 giờ lượng nước trong bể đạt tới  $\frac{1}{8}$  dung tích của bể. Hỏi nếu không có vòi chảy ra mà chỉ có vòi chảy vào thì trong thời gian bao lâu sẽ đầy bể?

Hd:

Theo bài ra ta có:  $+v_{ra} = \frac{4}{5} \times v_{vào}$

$$+v_{vào} - v_{ra} = \frac{1}{40}$$

Từ đây dễ dàng tính được  $v_{vào} = \frac{1}{40} \times 5 = \frac{1}{8}$  (bể)

Vậy suy ra vòi vào chảy một mình trong 8 giờ sẽ đầy bể.

**Bài 17:**

Người ta dùng hai vòi nước cùng chảy vào 1 bể không chứa nước. Nếu cho 2 vòi cùng chảy vào bể thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu cho vòi 1 chảy trong 2 giờ và vòi 2 chảy trong 5 giờ thì cũng đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu sẽ đầy bể?

**Hd:**

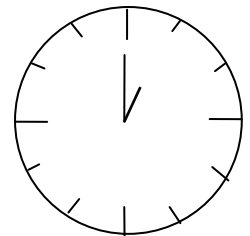
Theo bài ra ta có tổng vận tốc của 2 vòi là:  $v_1 + v_2 = \frac{1}{3}$  (bể)

Lượng nước 2 vòi cùng chảy trong 2 giờ là:  $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$  (bể)

Lượng nước vòi 2 chảy trong 3 giờ là:  $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  (bể)

Vận tốc của vòi 2 là:  $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$  (bể)

Vận tốc của vòi 1 là:  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$  (bể)



**Bài 18:**

Một chiếc đồng hồ 3 kim để bàn đang chạy, ta thấy lúc 1 giờ đúng thì kim giờ trở số 1 còn kim phút trở số 12. Hỏi khoảng thời gian gần nhất để 2 kim giờ và kim phút trùng nhau? Cho biết thời điểm đó là mấy giờ?

**Hd:**

Gọi vận tốc kim giờ là  $v_h$ , vận tốc kim phút là  $v_f$ , ta

có:  $v_h = \frac{1}{12}$  vòng/h,  $v_f = 1$  vòng/h

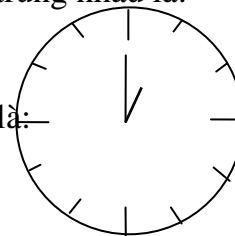
Khoảng cách giữa 2 kim lúc 1 giờ đúng là  $\frac{1}{12}$  vòng

Vậy khoảng thời gian gần nhất để 2 kim giờ và kim phút trùng nhau là:

$$\frac{1}{12} : [1 - \frac{1}{12}] = \frac{1}{11} \text{ (giờ)}$$

Thời điểm gần nhất để 2 kim giờ và kim phút trùng nhau là:

$$\frac{1}{11} + 1 = 1\frac{1}{11} \text{ (giờ)}$$



**Bài 19:**

Một chiếc đồng hồ 3 kim để bàn đang chạy, ta thấy lúc 1 giờ đúng thì kim giờ trở số 1 còn kim phút trở số 12. Hỏi khoảng thời gian gần nhất để 2 kim giờ và kim phút vuông góc với nhau? Cho biết thời điểm đó là mấy giờ?

**Hd:**

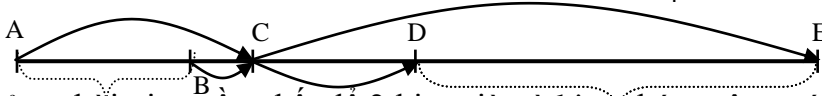
Gọi vận tốc kim giờ là  $v_h$ , vận tốc kim phút là  $v_f$ , ta

có:  $v_h = \frac{1}{12}$  vòng/h,  $v_f = 1$  vòng/h

Khoảng cách giữa 2 kim lúc 1 giờ đúng là  $\frac{1}{12}$  vòng



Khoảng cách giữa 2 kim lúc 2 kim vuông góc là  $\frac{1}{4}$  vòng



Vậy khoảng thời gian gần nhất để 2 kim giờ và kim phút vuông góc với nhau tính từ lúc trùng nhau là:

$$\frac{1}{4} : [1 - \frac{1}{12}] = \frac{3}{11} \text{ (giờ)}$$

Vậy khoảng thời gian gần nhất để 2 kim giờ và kim phút vuông góc với nhau tính từ lúc 1 giờ đúng là:

$$\frac{3}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11} \text{ (giờ)}$$

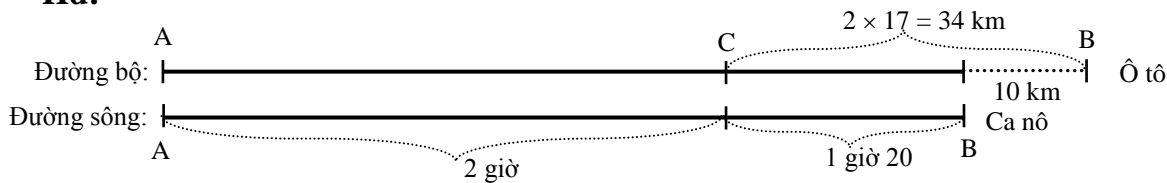
Thời điểm gần nhất để 2 kim giờ và kim phút vuông góc với nhau là:

$$\frac{4}{11} + 1 = 1\frac{4}{11} \text{ (giờ)}$$

### **Bài 20:**

Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10 km. Đi từ A đến B ca nô đi hết 3 giờ 20 phút, còn ô tô đi hết 2 giờ. Tính vận tốc của ca nô và ô tô, biết vận tốc của ca nô kém vận tốc ô tô 17 km/h.

**Hd:**



Sau 2 giờ ca nô tới vị trí còn cách B tính theo đường bộ là:

$$17 \times 2 = 34 \text{ (km)}$$

Sau 2 giờ ca nô tới vị trí còn cách B tính theo đường sông là:

$$34 - 10 = 24 \text{ (km)}$$

Vận tốc của ca nô là:

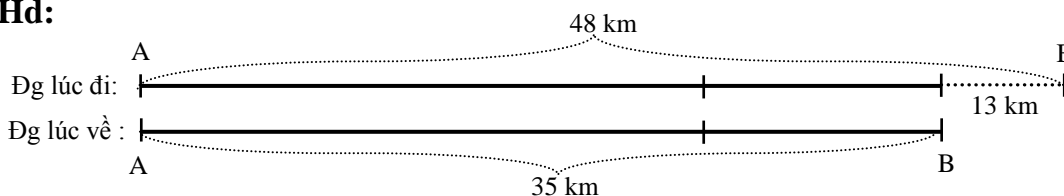
$$24 : 1 \text{ giờ } 20 = 18 \text{ (km/h)}$$

### **Bài 21:**

Anh Hùng đi xe đạp từ nhà đến Hà Nội theo con đường dài 48 km. Lúc trở về anh Hùng đi theo đường tắt dài 35 km. Đường tắt khó đi nên vận tốc lúc về chỉ bằng  $\frac{5}{6}$  vận tốc lúc đi, tuy nhiên

thời gian lúc về vẫn ít hơn thời gian lúc đi là  $\frac{1}{2}$  giờ. Tính vận tốc lúc đi của anh Hùng?

**Hd:**



Quy về cùng thời gian lúc về của anh Hùng:

+ Thời gian lúc về, vận tốc lúc về thì anh Hùng đi được quãng đường 35 km.

+ Thời gian lúc về, vận tốc đi (vận tốc lúc về bằng  $\frac{5}{6}$  vận tốc lúc đi) thì anh Hùng đi được

quãng đường bằng bao nhiêu km?

Vì trong cùng thời gian thì quãng đường tỷ lệ thuận với vận tốc, nên ta có quãng đường anh Hùng đi được trong cùng thời gian lúc về và với vận tốc lúc đi là:

$$35 : \frac{5}{6} = 42 \text{ (km)}$$

Vận tốc của anh Hùng lúc về là:

$$(48 - 42) : \frac{1}{2} = 12 \text{ (km/h)}$$

### **Bài 22:**

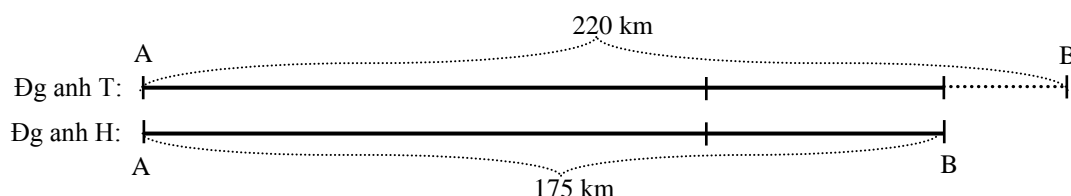
Nhà anh H cách trung tâm thành phố 175 km, nhà anh T cách trung tâm thành phố 220 km.

Biết vận tốc tới trung tâm thành phố của anh H chỉ bằng  $\frac{7}{8}$  vận tốc của anh T, tuy nhiên thời gian tới

trung tâm thành phố của anh H vẫn ít hơn thời gian tới trung tâm thành phố của anh T là  $\frac{1}{2}$  giờ.

Tính vận tốc tới trung tâm thành phố của anh H là bao nhiêu?

**Hd:**



Quy về cùng thời gian lúc về của anh H:

+ Thời gian của H, vận tốc của anh H thì anh H đi được quãng đường 175 km.

+ Thời gian của H, vận tốc của anh T (vận tốc của anh H bằng  $\frac{7}{8}$  vận tốc của anh T) thì anh T

đi được quãng đường bằng bao nhiêu km?

Vì trong cùng thời gian thì quãng đường tỷ lệ thuận với vận tốc, nên ta có quãng đường anh T đi được trong cùng thời gian của anh H và với vận tốc của anh T là:

$$175 : \frac{7}{8} = 200 \text{ (km)}$$

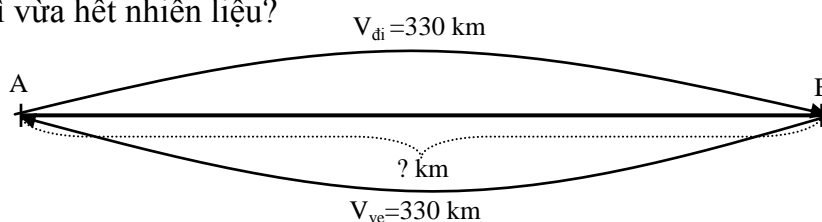
Vận tốc của anh Hùng lúc về là:

$$(220 - 200) : \frac{1}{2} = 40 \text{ (km/h)}$$

### **Bài 23:**

Một máy bay dự trữ nhiên liệu để bay trong 6 giờ với vận tốc 330 km/h khi trời không có gió. Khi cất cánh thì trời có gió với vận tốc gió là 30 km/h. Biết rằng khi đi trời ngược gió và khi quay trở về sân bay thì trời xuôi gió. Hỏi khoảng cách mà máy bay đã tới cánh sân bay bao nhiêu km để khi quay về tới sân bay lúc cất cánh thì vừa hết nhiên liệu?

**Hd:**



Theo bài ra ta có:  $t_{đi} + t_{ve} = 6$  (giờ)

$$\frac{v_{di}}{v_{ve}} = \frac{300}{360} \Rightarrow \frac{t_{di}}{t_{ve}} = \frac{v_{ve}}{v_{di}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Đến đây ta đã đưa về dạng toán tìm 2 số biết tổng bằng 6 và tỷ số bằng  $\frac{5}{6}$ . Do đó ta suy ra thời gian lúc đi là:

$$6 : (6 + 5) \times 6 = \frac{36}{11} \text{ (giờ)}$$

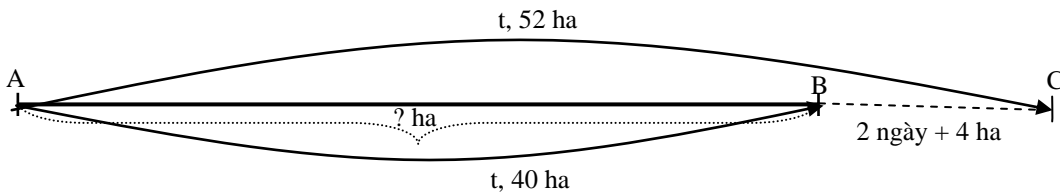
Quãng đường mà máy bay đi được là:

$$300 \times \frac{36}{11} = \frac{10800}{11} \text{ (km)}$$

### **Bài 24:**

Một đội máy cày dự định cày một diện tích ruộng theo kế hoạch với vận tốc 40 ha mỗi ngày. Khi thực hiện đội đã cày 52 ha mỗi ngày, vì vậy đội không những đã cày xong trước thời hạn 2 ngày và còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích ruộng phải cày theo kế hoạch?

**Hd:**



Theo bài ra ta có:

Diện tích đội đã cày hết thời gian dự định vượt so với diện tích theo kế hoạch là:

$$52 \times 2 + 4 = 108 \text{ (ha)}$$

Diện tích trong mỗi ngày đội đã cày hơn so với dự định là:

$$52 - 40 = 12 \text{ (ha)}$$

Thời gian mà đội dự định cày xong diện tích ruộng theo kế hoạch là:

$$108 : 12 = 9 \text{ (ngày)}$$

Diện tích ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch là:

$$40 \times 9 = 360 \text{ (ha)}$$

Cách giải khác:

Thời gian dự định  $t_1$ — vận tốc dự định  $v_1$ —diện tích ruộng theo kế hoạch

Thời gian thực hiện  $t_2$ —vận tốc thực hiện  $v_2$ —diện tích ruộng theo kế hoạch

$$\text{Do đó suy ra: } \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{52}{40} = \frac{13}{10}$$

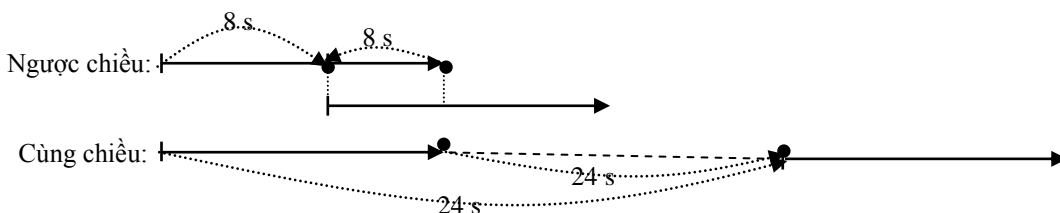
$$\text{Mà ta lại dễ thấy: } t_1 = t_2 + 2\frac{4}{52}.$$

Đến đây đưa về dạng toán tìm 2 số biết tỷ số và hiệu của chúng.

### **Bài 25:**

Một chiếc xe lửa chạy qua mặt một người đi xe đạp cùng chiều có vận tốc 18 km/h hết 24 giây và qua mặt một người đi xe đạp ngược chiều có vận tốc 18 km/h hết 8 giây. Tính vận tốc của xe lửa.

**Hd:**



Đổi đơn vị:  $18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$

Trong khoảng thời gian 24 giây người ngồi trên xe lửa đi được quãng đường là:

$$\text{Chiều dài xe lửa} + (5 \times 24) = \text{Chiều dài xe lửa} + 120 \text{ (m)}$$

Trong khoảng thời gian 8 giây xe lửa tốc hành đi được quãng đường là:

$$\text{Chiều dài xe lửa} - (5 \times 8) = \text{Chiều dài xe lửa} - 40 \text{ (m)}$$

$\Rightarrow$  Thời gian xe lửa đi được quãng đường  $120 + 40 = 160 \text{ (m)}$  là:

$$24 - 8 = 16 \text{ (s)}$$

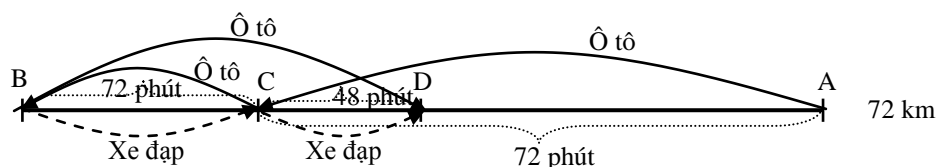
Vận tốc của xe lửa là:

$$160 : 16 = 10 \text{ (m/s)} = 36 \text{ (km/h)}$$

### **Bài 26:**

Hai địa điểm A, B cách nhau 72 km. Một ô tô đi từ A về B và một xe đạp đi từ B về A cùng xuất phát một lúc và sau 1 giờ 12 phút gặp nhau tại địa điểm C. Sau đó ô tô tiếp tục chạy đến B rồi quay trở về A ngay với vận tốc cũ. Ô tô đuổi kịp người đi xe đạp ở vị trí D sau 48 phút kể từ lúc gặp nhau lần trước. Tính vận tốc của ô tô và xe đạp.

**Hd:**



Theo bài ra ta có:

Tổng vận tốc của ô tô và xe đạp là:  $72000 : 72 = 1000 \text{ (m/ph)}$

Sau khoảng thời gian  $72 + 48 = 120 \text{ (phút)}$  ta có:

Xe đạp đi được quãng đường là:  $BC + CD = BD$

Ô tô đi được quãng đường là:  $AC + CB + BC + CD = AB + BD$

Hiệu của hai quãng đường của ô tô và xe đạp là:  $(AB + BD) - BD = AB = 72000$

Hiệu của hai vận tốc của ô tô và xe đạp là:

$$72000 : 120 = 600 \text{ (m/ph)}$$

Vậy vận tốc của ô tô là:

$$(1000 + 600) : 2 = 800 \text{ (m/ph)}$$

Vận tốc của xe đạp là:

$$(1000 - 600) : 2 = 200 \text{ (m/ph)}$$

## § 5. TOÁN HÌNH HỌC

### **Bài 1:**

Cho tam giác ABC, với điểm M, N là điểm chính giữa cạnh AB, AC. Chứng minh rằng

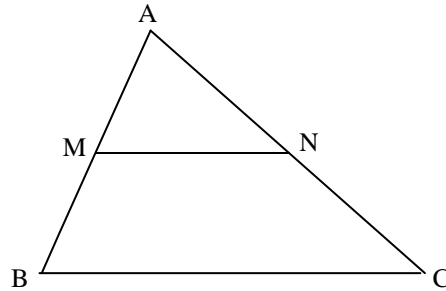
$$S_{AMN} = \frac{1}{4} \times S_{ABC}$$

**Hd:**

Ta có:  $S_{ABC} = 2 \times S_{ABN}$  (Chung c/cao từ B tới AC và đáy  $AC = 2 \times AN$ )

$S_{ABN} = 2 \times S_{AMN}$  (Chung c/cao từ N tới AB và đáy  $AB = 2 \times AM$ )

Do đó suy ra  $S_{ABC} = 4 \times S_{AMN}$



### **Bài 2:**

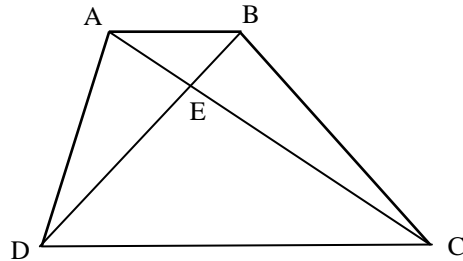
Cho hình thang ABCD với hai đáy AB, CD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng  $S_{AED} = S_{BEC}$ .

**Hd:**

Ta có:  $S_{ADC} = S_{BDC}$  (Chung đáy DC và cùng c/cao của hình thang)

$$\Rightarrow S_{ADC} - S_{EDC} = S_{BDC} - S_{EDC}$$

Do đó suy ra  $S_{AED} = S_{BEC}$



### **Bài 3:**

Cho hình chữ nhật ABCD, I là điểm chia AB thành hai phần bằng nhau, đoạn thẳng BD cắt CI tại K. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD, biết diện tích tứ giác ADKI là  $20 \text{ cm}^2$ .

**Hd:**

$$+ \text{Khẳng định được } S_{DIB} = \frac{1}{2} S_{CDB} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} h_2$$

$$\Rightarrow S_{IDK} = \frac{1}{2} S_{CDK}$$

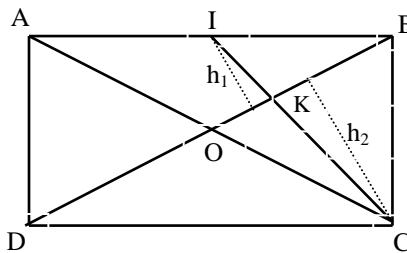
$$\Rightarrow S_{CDI} = S_{IDK} + S_{DKC} = 3S_{DIK}$$

$$+ \text{Mà } S_{CDI} = 2 S_{ADI} \Rightarrow S_{ADI} = \frac{3}{2} S_{IDK} \text{ hay } S_{IDK} = \frac{2}{3} S_{ADI}$$

+  $S_{AIKD} = S_{DAI} + S_{IDK} = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$  nên suy ra:

$$S_{ADI} + \frac{2}{3} S_{ADI} = 20 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ hay } S_{ADI} = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$+ S_{ABCD} = 4 \times S_{ADI} = 4 \times 12 = 48 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



### **Bài 4:**

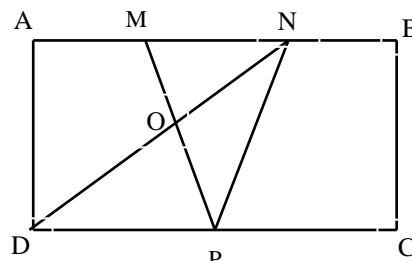
Cho hình chữ nhật ABCD. Trên cạnh AB lấy 2 điểm M, N sao cho  $AM = MN = NB$ . P là điểm chia cạnh DC thành 2 phần bằng nhau. ND cắt MP tại O. Biết diện tích tam giác DOP lớn hơn diện tích tam giác MON là  $3,5 \text{ cm}^2$ . Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

**Hd:**

Từ  $S_{POD} = S_{MON} + 3,5 \text{ cm}^2$  ta có:

$$\Rightarrow S_{POD} + S_{NOP} = S_{MON} + S_{NOP} + 3,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Hay } S_{NPD} = S_{MPN} + 3,5 \text{ cm}^2.$$



Mặt khác  $S_{NPD} = 1,5 \times S_{MPN}$

(Vì đáy  $DP = 1,5 \times MN$  và cùng đường cao là chiều rộng hình chữ nhật).

Do đó  $S_{NPD} = 10,5 \text{ cm}^2$ ;  $S_{MPN} = 7 \text{ cm}^2$ .

Vậy  $S_{ABCD} = 4 \times S_{NPD} = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

### **Bài 5:**

Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích là  $108 \text{ cm}^2$ . M là điểm chính giữa cạnh AB. Trên đoạn thẳng DM lấy điểm I sao cho  $DI = \frac{1}{3}DM$ . Hai đoạn thẳng AI và BD cắt nhau tại điểm K. Tính diện tích tứ giác MIKC.

**Hd:**

+ Ta có:  $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 108 : 2 = 54 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

$S_{ADM} = S_{BDM}$  (chung đường cao AD, đáy  $MA = MB$ )

$\Rightarrow S_{ADM} = \frac{1}{2} S_{ABD} = 54 : 2 = 27 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

$\Rightarrow S_{AID} = \frac{1}{3} S_{ADM} = 27 : 3 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$ ;

$S_{AMI} = \frac{2}{3} S_{ADM} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

$S_{BID} = \frac{1}{3} S_{BDM} = 27 : 3 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$ ;  $S_{BMI} = \frac{2}{3} S_{BDM} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

$\Rightarrow S_{AIB} = 18 + 18 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$ .  $\Rightarrow S_{AID} : S_{AIB} = 9 : 36 = \frac{1}{4}$

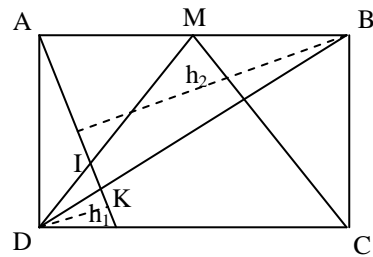
$\Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{DIK} : S_{BIK} = \frac{1}{4}$  (chung đáy IK và  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4}$ )

$\Rightarrow \frac{DK}{BK} = \frac{1}{4}$  (chung đường cao hạ từ I) và  $S_{DIK} = \frac{1}{5} S_{BID} = \frac{1}{5} \times 9 = 1,8 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

+ Mặt khác ta có  $S_{DCK} : S_{BCK} = \frac{1}{4}$  (chung đáy CK và  $\frac{DK}{BK} = \frac{1}{4}$ )

Nên  $S_{DCK} = \frac{1}{5} S_{BCD} = \frac{1}{5} S_{ABD} = 54 \times \frac{1}{5} = 10,8 \text{ (cm}^2\text{)}$ .  $S_{BCM} = S_{ADM} = 27 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Vậy  $S_{MIKC} = S_{ABCD} - S_{ADM} - S_{BCM} - S_{DIK} - S_{DCK}$   
 $= 108 - 27 - 27 - 1,8 - 10,8 = 41,4 \text{ (cm}^2\text{)}$ .



### **Bài 6:**

Cho hình thang ABCD có đáy AB nhỏ hơn đáy CD và  $AD = BC$ . Trên cạnh AD lấy điểm M, kéo dài BC về phía C, trên đó lấy điểm N sao cho  $DM = CN$ . MN cắt DC tại I. Chứng tỏ rằng I là điểm chính giữa của MN.

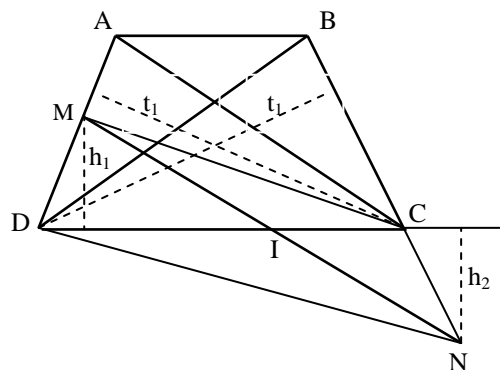
**Hd:**

Ta có  $S_{BDC} = S_{ADC}$  (chung đáy CD và các đường cao  $t_1, t_2$  hạ từ A và B bằng nhau)

$\Rightarrow t_1 = t_2$  (Vì có 2 đáy  $AD = BC$ )

$\Rightarrow S_{DNC} = S_{DMC}$

(Vì có đáy  $MD = NC$  và hai đường cao  $t_1 = t_2$ )



$$\Rightarrow h_1 = h_2 \text{ (chung đáy DC)}$$

$$\Rightarrow S_{MIC} = S_{NIC} \text{ (chung đáy IC và chiều cao } h_1 = h_2)$$

$$\Rightarrow IM = IN \text{ (chung đường cao hạ từ C).}$$

### **Bài 7:**

Cho hình chữ nhật ABCD có độ dài các cạnh  $CD = 20\text{cm}$ ,  $AD = 14\text{cm}$ . Hai điểm M, N thuộc cạnh AB sao cho  $AM = 8\text{cm}$ ,  $BN = 4\text{cm}$ . Hai đường thẳng CM và DN cắt nhau tại K. Tính tỷ số  $\frac{KN}{KD}$  và diện tích  $S_{AMKD}$  ?

**Hd:**

- Tính  $\frac{KN}{KD} = ?$

Ta có  $S_{NCM} = 56 \text{ cm}^2$  và  $S_{DCM} = 140 \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{NCM}}{S_{DCM}} = \frac{56}{140} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{5} \text{ (} h_1, h_2 \text{ là chiều cao từ N, D tới CM)}$$

Mà  $h_1, h_2$  là chiều cao của MKN và MKD nên:

$$\frac{S_{MKN}}{S_{MKD}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{5}$$

Mặt khác  $\frac{S_{MKN}}{S_{MKD}} = \frac{KN}{KD}$  ( Vì 2 tam giác này chung chiều cao hạ từ M tới DN)

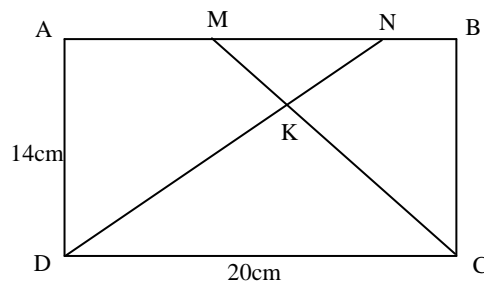
Vậy ta suy ra:  $\frac{KN}{KD} = \frac{2}{5}$

- Tính  $S_{AMKD} = ?$

Ta có:  $\frac{S_{MKN}}{S_{MKD}} = \frac{KN}{KD} = \frac{2}{5}$  và  $S_{MKN} + S_{MKD} = 56$

Đưa về dạng toán tìm 2 số biết tổng bằng 56 còn tỷ số bằng  $\frac{2}{5}$ . Ta dễ dàng tính được  $S_{MKD} = 56 : (2 + 5) \times 5 = 40 \text{ cm}^2$ .

Suy ra  $S_{AMKD} = S_{ADM} + S_{MDK} = 56 + 40 = 96$



### **Bài 8:**

Cho hình chữ nhật MNPQ có độ dài các cạnh  $MN = 15\text{cm}$ ,  $NP = 12\text{cm}$ . Hai điểm E, F thuộc cạnh MN sao cho  $ME = NF = 6\text{cm}$ . Hai đường QF và PE cắt nhau tại K. Tính tỷ số  $\frac{KF}{KQ}$  và diện tích  $S_{MEKQ}$  ?

**Hd:**

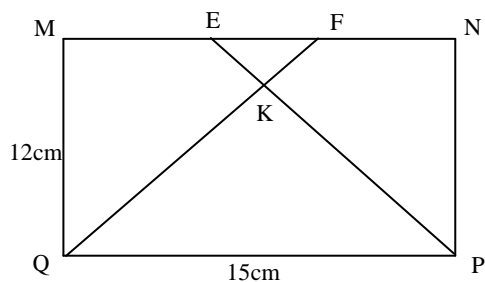
- Tính  $\frac{KF}{KQ} = ?$

Ta có  $S_{PEF} = 18 \text{ cm}^2$  và  $S_{EPQ} = 90 \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{PEF}}{S_{EPQ}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5} \text{ (} h_1, h_2 \text{ là chiều cao từ F, Q tới EP)}$$

Mà  $h_1, h_2$  là chiều cao của FKE và QKE nên ta có:



$$\frac{S_{FKE}}{S_{QKE}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5}$$

Mặt khác  $\frac{S_{FKE}}{S_{QKE}} = \frac{KF}{KQ}$  ( Vì 2 tam giác này chung chiều cao hạ từ E tới QN )

Vậy ta suy ra:  $\frac{KF}{KQ} = \frac{2}{5}$

- Tính  $S_{AMKD} = ?$

Tính  $\frac{S_{FKE}}{S_{QKE}} = \frac{KF}{KE} = \frac{1}{5}$  và  $S_{QKE} + S_{FKE} = 18$

Đưa về dạng toán tìm 2 số biết tổng bằng 56 còn tỷ số bằng 1/5. Ta dễ dàng tính được  $S_{QKE} = 18 : (1 + 5) \times 5 = 15 \text{ cm}^2$ .

Suy ra  $S_{MEKQ} = S_{MEQ} + S_{QKE} = 36 + 15 = 51 \text{ cm}^2$

### **Bài 9:**

Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $120 \text{ cm}^2$ . Hai điểm M, N lần lượt thuộc cạnh CA và CB sao cho  $CM = \frac{2}{3} \times CA$ ;  $CN = \frac{1}{3} \times CB$ . Hai đường BM cắt AN tại K. Tính  $S_{AMNB}$  và tỷ số  $\frac{KB}{KM}$  ?

**Hd:**

- . Tính  $S_{AMNB} = ?$

$$S_{CAN} = \frac{1}{3} S_{CAB} = \frac{1}{3} \times 120 = 40$$

$$S_{CMN} = \frac{2}{3} S_{CAN} = \frac{2}{3} \times 40 = \frac{80}{3}$$

$$S_{BCM} = 120 - \frac{80}{3} = \frac{280}{3}$$

- Tính  $\frac{KB}{KM} = ?$

Ta có:  $S_{ABN} = 2 \times S_{ACN}$  ( Vì chung chiều cao hạ từ A tới BC và đáy  $BN = 2 \times CN$  )

$S_{KBN} = 2 \times S_{KCN}$  ( Vì chung chiều cao hạ từ K tới BC và đáy  $BN = 2 \times CN$  )

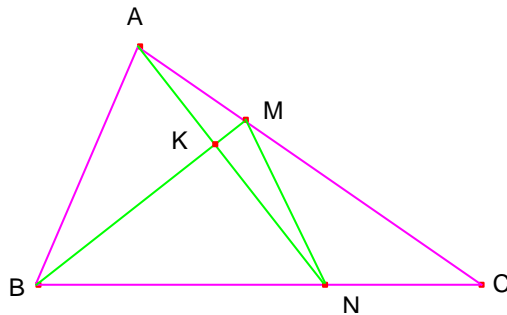
$$\Rightarrow S_{KAB} = 2 S_{KAC}$$

Mà dễ thấy  $S_{KAC} = 3 \cdot S_{KAM}$  ( Vì chúng chung chiều cao hạ từ K tới AC và đáy  $AC = 3 \cdot AM$  )

$$\text{Do đó suy ra: } S_{KAB} = 2 \times 3 \times S_{KAM} = 6 \cdot S_{KAM} \Rightarrow \frac{S_{KAB}}{S_{KAM}} = \frac{6}{1} = 6$$

Mặt khác  $\frac{S_{KAB}}{S_{KAM}} = \frac{KB}{KM}$  ( Vì 2 tam giác này chung chiều cao hạ từ A tới BM )

Vậy ta suy ra:  $\frac{KB}{KM} = 6$



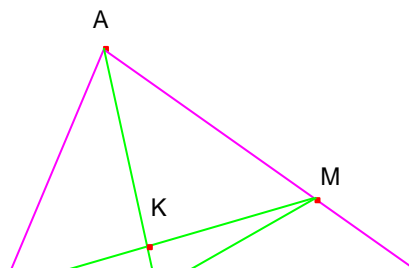
### **Bài 10:**

Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $180 \text{ cm}^2$ . Hai điểm M, N lần lượt thuộc cạnh CA và CB sao cho  $CM = \frac{1}{3} \times CA$ ;  $CN = \frac{2}{3} \times CB$ . Hai đường BM cắt AN tại K. Tính  $S_{AMNB}$  và tỷ số  $\frac{KM}{KB}$ .

**Hd:**

- . Tính  $S_{AMNB} = ?$

$$S_{CAN} = \frac{2}{3} \times S_{CAB} = \frac{2}{3} \times 180 = 120$$





$$S_{CMN} = 1/3 \times S_{CAN}$$

$$= 1/3 \times 120 = 40$$

$$S_{BCM} = 180 - 40 = 140$$

- Tính  $\frac{KM}{KB} = ?$

Ta có:  $S_{ACN} = 2 \times S_{ABN}$  ( Vì chúng chung chiều cao hạ từ A tới BC và đáy CN = 2 \times BN )

$S_{KCN} = 2 \times S_{KBN}$  ( Vì chúng chung chiều cao hạ từ K tới BC và đáy CN = 2 \times BN )

$$\Rightarrow S_{KAC} = 2 \times S_{KAB}$$

Mà dễ thấy  $S_{KAM} = 2/3 \times S_{KAC}$  ( Vì chúng chung chiều cao hạ từ K tới AC và đáy AM = 2/3 \times AC )

$$\text{Do đó suy ra: } 3/2 \times S_{KAM} = 2 \times S_{KAB} \Rightarrow \frac{S_{KAM}}{S_{KAC}} = \frac{3}{4}$$

Mặt khác  $\frac{S_{KAM}}{S_{KAB}} = \frac{KM}{KB}$  ( Vì 2 tam giác này chung chiều cao hạ từ A tới BM )

Vậy ta suy ra:  $\frac{KM}{KB} = \frac{3}{4}$

### **Bài 11:**

Cho hình thang ABCD với hai đáy AB, DC và biết DC = 3 \times AB. Hai đường chéo AC cắt BD tại E.

Chứng minh rằng  $S_{ADE} = S_{BCE}$  và tính tỷ số  $\frac{EA}{EC}$

**Hd:**

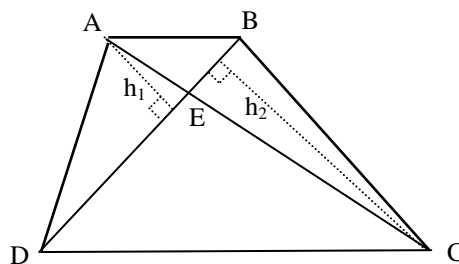
- Chứng minh  $S_{ADE} = S_{BCE}$

Ta có:  $S_{BCD} = S_{ACD}$  ( Chúng chung đáy DC

và cùng chiều cao hình thang)

$$\text{Do đó: } S_{ADE} - S_{CDE} = S_{BCE} - S_{CDE}$$

$$\text{Suy ra: } S_{ADE} = S_{BCE}$$



- Tính  $\frac{EA}{EC} = ?$

Ta có:  $\frac{EA}{EC} = \frac{S_{BEA}}{S_{BEC}}$  ( Chúng chung chiều cao hạ từ B tới AC )

$$\frac{S_{BEA}}{S_{BEC}} = \frac{h_1}{h_2} \text{ (Chung đáy BE và nhận } h_1, h_2 \text{ là chiều cao hạ từ A, C tới BE )}$$

Mà  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$  ( Vì  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ A, C tới BD )

Dễ thấy  $S_{CBD} = 3 \times S_{ABD}$  ( Do chúng chung chiều cao là chiều cao của hình thang và DC = 3 \times AB ). Từ đây dễ dàng suy ra:  $\frac{EA}{EC} = \frac{1}{3}$

### **Bài 12:**

Cho hình thang ABCD với hai đáy AB, DC và biết  $DC = 3 \times AB$ . Hai đường chéo AC cắt BD tại I.

Chứng minh rằng  $S_{ADI} = S_{BCI}$  và tính tỷ số  $\frac{IB}{ID}$

**Hd:**

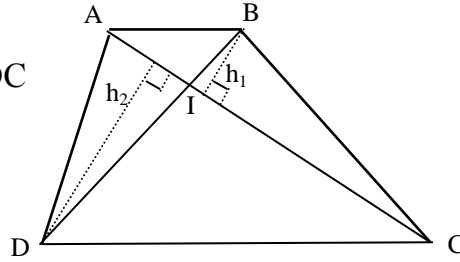
- Chứng minh  $S_{ADI} = S_{BCI}$

Ta có:  $S_{BCD} = S_{ACD}$  (Chứng chung đáy DC

và cùng chiều cao hình thang)

Do đó:  $S_{ADI} - S_{CDI} = S_{BCI} - S_{CDI}$

Suy ra:  $S_{ADI} = S_{BCI}$



- Tính  $\frac{IB}{ID} = ?$

Ta có:  $\frac{IB}{ID} = \frac{S_{AIB}}{S_{AID}}$  (Chứng chung chiều cao hạ từ A tới BD)

$\frac{S_{AIB}}{S_{AID}} = \frac{h_1}{h_2}$  (Chứng đáy AI và nhận  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ B, D tới AI)

Mà  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{BAC}}{S_{DAC}}$  (Vì  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ B, D tới AC)

Để thấy  $S_{DAC} = 3 \times S_{BAC}$  (Do chúng cùng có chiều cao là chiều cao của hình thang và  $DC = 3 \times AB$ ). Từ đây dễ dàng suy ra:  $\frac{IB}{ID} = \frac{1}{3}$

**Bài 13:**

Cho hình thang ABCD với hai đáy AB, DC và biết  $DC = 3 \times AB$ . Hai đường chéo AC cắt BD tại I và hai cạnh bên CB cắt DA tại O.

Chứng minh rằng  $S_{ADI} = S_{BCI}$  và tính tỷ số  $\frac{OA}{OD}$

**Hd:**

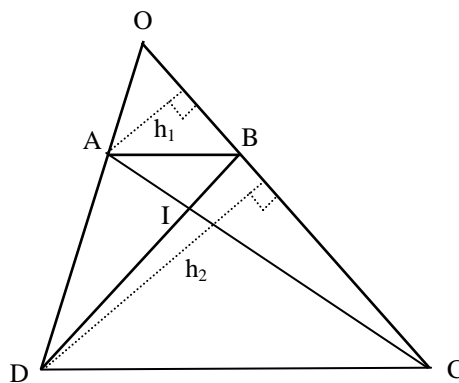
- Chứng minh  $S_{ADI} = S_{BCI}$

Ta có:  $S_{BCD} = S_{ACD}$  (Chứng chung đáy

DC và cùng chiều cao của hình thang)

Do đó:  $S_{ADI} - S_{CDI} = S_{BCI} - S_{CDI}$

Suy ra:  $S_{ADI} = S_{BCI}$



- Tính  $\frac{OA}{OD} = ?$

Ta có:  $\frac{OA}{OD} = \frac{S_{COA}}{S_{COD}}$  (Chứng chung chiều cao hạ từ C tới OD)

$\frac{S_{COA}}{S_{COD}} = \frac{h_1}{h_2}$  (Chứng chung đáy OC và nhận  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ A, D tới OC)

Mà  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}$  (Vì chung đáy BC và  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ A, D tới BC)

Để thấy  $S_{DBC} = 3 \times S_{ABC}$  (Do chúng đều có chiều cao là chiều cao của hình thang và  $DC = 3 \times AB$ ). Từ đây dễ dàng suy ra:  $\frac{OA}{OD} = \frac{1}{3}$

**Bài 14:**

Cho  $\triangle ABC$  với hai điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB, AC$ . Hai đường thẳng  $CM$  cắt  $BN$  tại  $E$  và kẻ đường  $AE$  cắt cạnh  $BC$  tại điểm  $F$ . Hãy tìm tỷ số  $\frac{EM}{EC}$  và chứng minh rằng  $F$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

**Hd:**

- Tính  $\frac{EM}{EC} = ?$

Để thấy:  $S_{CAM} = S_{BAN} = \frac{1}{2} \times S_{ABC}$

Suy ra:  $S_{ECN} = S_{EBM}$

Mặt khác ta có:  $S_{EBM} = S_{EAM}$  và  $S_{ECN} = S_{EAN}$

Do đó:  $S_{EBM} = S_{EAM} = S_{ECN} = S_{EAN} = \frac{1}{6} \times S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{EAC} = S_{EAB} = S_{EBC} = \frac{1}{3} \times S_{ABC}$

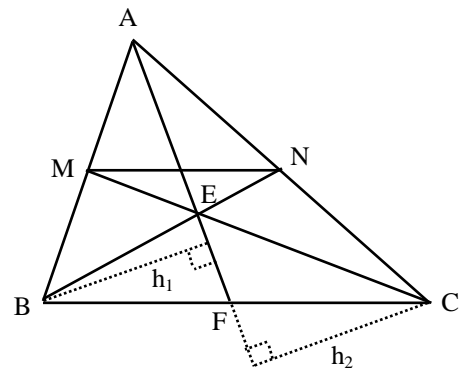
$\Rightarrow S_{EAM} = \frac{1}{2} \times S_{EBC}$ . Suy ra:  $\frac{EM}{EC} = \frac{1}{2}$

- Chứng minh rằng:  $BF = CF$

Theo chứng minh trên ta có:  $S_{EAC} = S_{EAB}$

Mà hai tam giác này lại có chung cạnh  $AE$ , nên suy ra:  $h_1 = h_2$  (Với  $h_1, h_2$  là chiều cao hạ từ  $B, C$  tới  $AE$ )

Suy ra:  $S_{EBF} = S_{ECF}$  (Vì hai tam giác này cũng nhận  $h_1, h_2$  là chiều cao và chung đáy  $EF$ ). Do đó suy ra:  $BF = CF$



**Bài 15:**

Cho  $\triangle ABC$  với hai điểm  $M, N$  lần lượt trên hai cạnh  $AB, AC$  sao cho:  $AB = 3 \times AM, AC = 3 \times AN$ . Biết diện tích  $S_{ABC} = 180 \text{ cm}^2$  và hai đường thẳng  $CM$  cắt  $BN$  tại  $E$ . Hãy tính  $S_{MNCB}$  và tìm tỷ số  $\frac{EM}{EC}$ .

**Hd:**

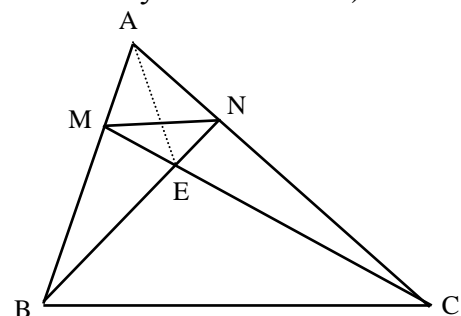
- Tính  $S_{MNCB} = ?$

Ta có:  $S_{AMN} = \frac{1}{3} \times S_{AMC}$  (Chung chiều cao hạ từ  $M$  tới  $AC$  và đáy  $AC = 3 \times AN$ )

$S_{AMC} = \frac{1}{3} \times S_{ABC}$  (Chúng chung chiều cao hạ từ  $C$  tới  $AB$  và đáy  $AB = 3 \times AM$ )

Suy ra:  $S_{AMN} = \frac{1}{9} \times S_{ABC} = 20 \text{ cm}^2$ .

Do đó:  $S_{MNCB} = 180 - 20 = 160 \text{ cm}^2$



- Tính  $\frac{EM}{EC} = ?$

Ta có:  $S_{BAN} = \frac{1}{2} \times S_{BCN}$  (Chung chiều cao hạ từ B tới AC và đáy  $CN = 2 \times AN$ )

$S_{EAN} = \frac{1}{2} \times S_{ECN}$  (Chung chiều cao hạ từ E tới AC và đáy  $CN = 2 \times AN$ )

Do đó:  $S_{BAN} - S_{EAN} = \frac{1}{2} \times (S_{BCN} - S_{ECN}) \Rightarrow S_{BAE} = \frac{1}{2} \times S_{BCE}$

Mặt khác có:  $S_{EBM} = \frac{2}{3} \times S_{EAB}$  (Chung chiều cao hạ từ E tới AB và đáy  $AB = 3 \times AM$ )

Do đó suy ra:  $\frac{3}{2} \times S_{EBM} = \frac{1}{2} \times S_{BCE}$ . Suy ra:  $\frac{S_{EBM}}{S_{EBC}} = \frac{1}{3}$

### **Bài 16:**

Cho  $\triangle ABC$  với hai điểm E, F lần lượt trên hai cạnh AB, AC sao cho:  $AB = 3 \times AE$ ,  $AC = 2 \times AF$ . Biết diện tích  $S_{ABC} = 240 \text{ cm}^2$  và hai đường thẳng CE cắt BF tại K. Hãy tính  $S_{EFCB}$  và tìm tỷ số  $\frac{KE}{KC}$ .

**Hd:**

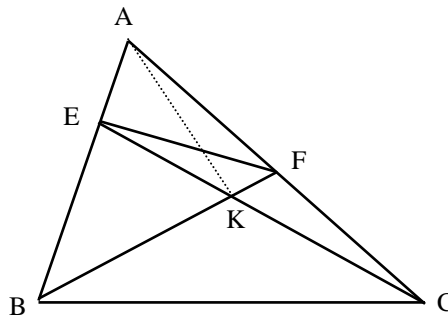
- Tính  $S_{EFCB} = ?$

Ta có:  $S_{AEF} = \frac{1}{2} \times S_{AEC}$  (Chung chiều cao hạ từ E tới AC và đáy  $AC = 2 \times AF$ )

$S_{AEC} = \frac{1}{3} \times S_{ABC}$  (Chung chiều cao hạ từ C tới AB và đáy  $AB = 3 \times AE$ )

Suy ra:  $S_{AEF} = \frac{1}{6} \times S_{ABC} = 40 \text{ cm}^2$ .

Do đó:  $S_{EFCB} = 240 - 40 = 200 \text{ cm}^2$



- Tính  $\frac{KE}{KC} = ?$

Ta có:  $S_{BAF} = S_{BCF}$  (Chung chung chiều cao hạ từ B tới AC và đáy  $CF = AF$ )

Ta có:  $S_{KAF} = S_{KCF}$  (Chung chung chiều cao hạ từ K tới AC và đáy  $CF = AF$ )

Do đó suy ra:  $S_{BAF} - S_{KAF} = S_{BCF} - S_{KCF} \Rightarrow S_{BAK} = S_{BCK}$

Mặt khác có:  $S_{KBE} = \frac{2}{3} \times S_{KAB}$  (Chung chung chiều cao hạ từ K tới AB và đáy  $AB = 3 \times AE$ ). Do đó

suy ra:  $\frac{3}{2} \times S_{KBE} = S_{BCK}$ . Suy ra:  $\frac{S_{KBE}}{S_{KBC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KE}{KC} = \frac{2}{3}$

### **Bài 17:**

Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $216 \text{ m}^2$ ,  $AB = AC$  và  $BC = 36 \text{ m}$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MB = \frac{1}{2} \times AB$ , trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $NC = \frac{1}{2} \times AC$  và trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $I$  sao cho  $BI = \frac{1}{2} \times BC$ . Nối  $M$  với  $N$  và  $N$  với  $I$ , ta được hình thang  $MNIB$ . Hãy tính :

- Diện tích hình thang  $MNIB$
- Độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

**Hd:**

- Diện tích hình thang  $MNIB$

Ta thấy:  $S_{NAM} = \frac{1}{2} \times S_{NBA}$

$$S_{BNA} = \frac{1}{2} \times S_{BCA}$$

Vậy suy ra:  $S_{NAM} = \frac{1}{4} \times S_{BCA} = 54 \text{ m}^2$

Tương tự có:  $S_{CNI} = 54 \text{ m}^2$

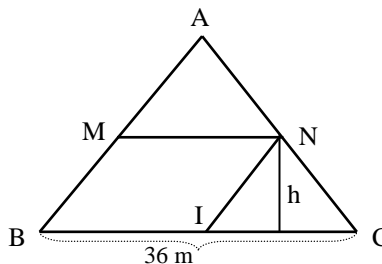
Do đó có:  $S_{MNIB} = 216 - 54 - 54 = 108 \text{ m}^2$

- Độ dài đoạn thẳng  $MN$ :

$S_{BNC} = \frac{1}{2} \times S_{BCA} = 108 \text{ m}^2$ , mà  $BC = 36 \text{ m}$ . Suy ra chiều cao hạ từ  $N$  tới  $BC$  là:

$$2 \times 108 : 36 = 6 \text{ (m)}$$

Diện tích của hình thang  $MNCB$  là:  $216 - 54 = 162 \text{ (m}^2\text{)}$



Độ dài đáy  $MN$  là:  $2 \times 162 : 6 - 36 = 72 \text{ (m)}$

**Bài 18:**

Cho  $\triangle ABC$  có:  $AB = AC$ . Biết điểm  $E \in$  cạnh  $AB$  và điểm  $F \in AC$  kéo dài sao cho  $BE = CF$ . Gọi  $I = EF \times BC$ .

Chứng minh rằng :  $IE = IF$

**Hd:**

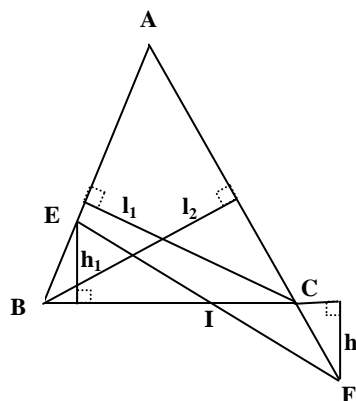
- Để c.m.r  $IE = IF$  ta c.m.r tam giác  $BEI$  và  $BFI$  chúng có diện tích bằng nhau

- Để c.m.r tam giác  $BEI$  và  $BFI$  có diện tích bằng nhau ta c.m.r  $h_1 = h_2$

- Để c.m.r  $h_1 = h_2$  ta c.m.r tam giác  $EBC$  và  $FBC$  có diện tích bằng nhau

- Để c.m.r tam giác  $EBC$  và  $FBC$  có diện tích bằng nhau ta c.m.r  $l_1 = l_2$

Ta thấy  $l_1 = l_2$  là để thấy tam giác  $ABC$  có  $AB = AC$



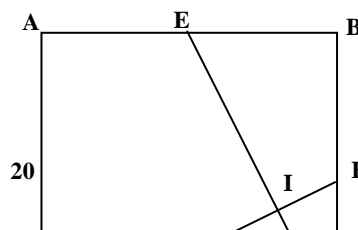
**Bài 19:**

Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh là  $20 \text{ cm}$

Biết điểm  $E \in$  cạnh  $AB$  và điểm  $F \in$  cạnh  $BC$  sao cho  $EA = EB = FB = FC$ .

Gọi  $I = CE \times DF$ .

Tính  $dt(AEID) = ?$



**Hd:**

$$- S_{AEID} = S_{ABCD} - S_{EBC} - S_{ICD} \\ = 400 - 100 - 80 = 220$$

- Dễ dàng tính được tổng diện tích của hai tam giác ICF và ICD bằng 100.

- Xét việc tính tỉ số diện tích của hai tam giác ICF và ICD:

$$\frac{S_{ICF}}{S_{ICD}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{ECF}}{S_{ECD}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

- Suy ra:  $S_{ICD} = 100 : (4 + 1) \times 4 = 80$

$$- S_{AEID} = S_{ABCD} - S_{EBC} - S_{ICD} = 400$$

**Bài 20:**

Cho  $\Delta ABC$  có  $dt(ABC) = 100 \text{ cm}^2$ . Lấy hai điểm  $E \in$  cạnh  $AC$  và  $F \in$  cạnh  $BC$  sao cho  $BF = \frac{1}{2} \times FC$  và  $CE = \frac{1}{3} \times AE$ . Gọi điểm  $K = EF \times AB$ .

Hãy tính  $dt(ABFE) = ?$  và tính tỷ số  $\frac{KB}{KA} = ?$

**Hd:**

$$dt(KCF) = 2 \times dt(KBF)$$

+

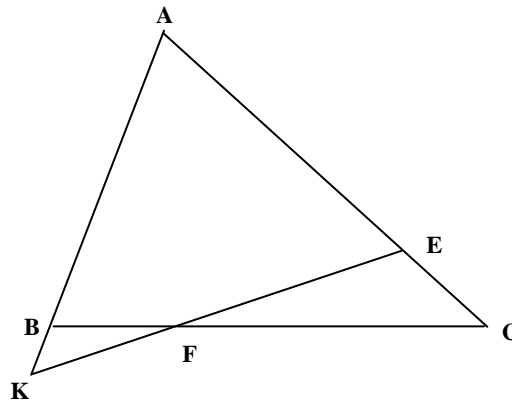
$$dt(ECF) = 2 \times dt(EBF)$$

$$\Rightarrow dt(KCE) = 2 \times dt(KBE)$$

$$\text{Mà } dt(KCE) = \frac{1}{3} \times dt(KAE)$$

$$\Rightarrow dt(KBE) = \frac{1}{6} \times dt(KAE)$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{1}{6}$$



**Bài 21:**

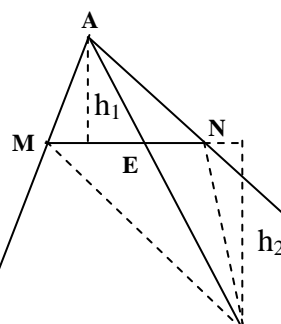
Cho  $\Delta ABC$  có hai điểm  $M \in$  cạnh  $AB$  và  $N \in$  cạnh  $AC$  sao cho  $AM = \frac{1}{3} \times AB$  và  $AN = \frac{1}{3} \times AC$ . Lấy điểm bất kỳ  $E \in MN$ ; Gọi  $F = AE \times BC$

Tính tỷ số  $\frac{AE}{AF} = ?$

**Hd:**

$$\text{Ta có } dt(AMF) = \frac{1}{3} \times dt(ABF)$$

$$dt(ANF) = \frac{1}{3} \times dt(ACF)$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow dt(MNP) &= 2 \times dt(AMN) \\ \Rightarrow h_2 &= 2 \times h_1 \\ \Rightarrow dt(MEF) &= 2 \times dt(AME) \\ \Rightarrow dt(NEF) &= 2 \times dt(ANE) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} EF &= 2AE \\ \underbrace{EF + AE}_{AF} &= 3AE \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{1}{3}$$

### **Bài 22:**

Cho ABCD là hình chữ nhật Lấy điểm E ∈ cạnh AD và F ∈ cạnh BC sao cho EA = ED = FB = FC.

Hai điểm M ∈ cạnh AB và N ∈ cạnh DC. Gọi điểm I = EF ∩ MN

- Tính  $dt(ABFE) = ?$   
 $dt(EFCD) = ?$  theo  $dt(ABCD)$
- So sánh MI và NI

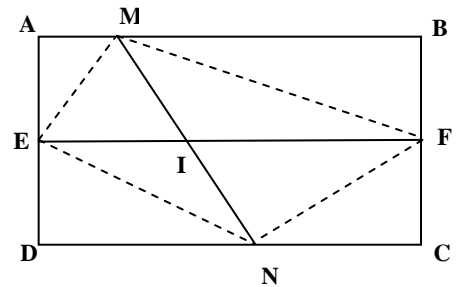
**Hd:**

- $dt(ABFE) = \frac{(AE+BF) \times AB}{2} = \frac{AD \times AB}{2} = \frac{1}{2} \times dt(ABCD)$   
 $dt(DEFCD) = ?$  Tương tự vớ đây là hai hình thang
- 

$$\begin{aligned} dt(AEM) + dt(BFM) &= \frac{1}{2} AM \times AE + \frac{1}{2} BM \times BF \\ &= \frac{1}{4} (AM+BM) \times AD = \frac{1}{4} AB \times AD \end{aligned}$$

Tương tự ta có :

$$\begin{aligned} dt(DEM) + dt(CFN) &= \frac{1}{4} AB \times AD \\ \Rightarrow dt(MEF) &= dt(NEF) \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow IM = IN \end{aligned}$$

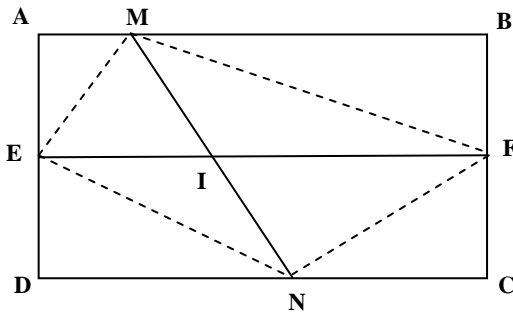


### **Bài 23:**

Cho ABCD là hình chữ nhật.  
Lấy điểm E, F trên hai cạnh AB, CD sao cho EA = ED = FB = FC. Lấy I trên EF sao cho EI = 2 × FI

- So sánh:  $dt(AMND)$  và  $dt(CNMB)$
- Chứng minh rằng:  $EI = \frac{AM + DN}{2}$

**Hd:**



$$\begin{aligned} dt(AEM) + dt(DEN) &= \frac{1}{2} (AM + DN) \times AE \\ &= \frac{1}{4} (AM + DN) \times AD \\ &= \frac{1}{2} dt(AMND) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dt(AEM) + dt(DEN) = dt(EMN)$$

$$\text{Tương tự : } dt(BFM) + dt(CFN) = dt(FMN)$$

$$\text{Ta có : } dt(MEI) = 2 \times dt(MFI)$$

$$dt(NEI) = 2 \times dt(NFI)$$

$$\Rightarrow \underbrace{dt(MEI) + dt(NEI)} = 2 \left[ \underbrace{dt(MFI) + dt(NFI)} \right]$$

$$\Rightarrow dt(EMN) = 2 \times dt(FMN)$$

$$\Rightarrow 2 \times dt(EMN) = 4 \times dt(FMN)$$

$$\text{Do đó suy ra: } dt(AMND) = 2 \times dt(CMNB)$$

### **Bài 24:**

Cho ABCD là hình chữ nhật.

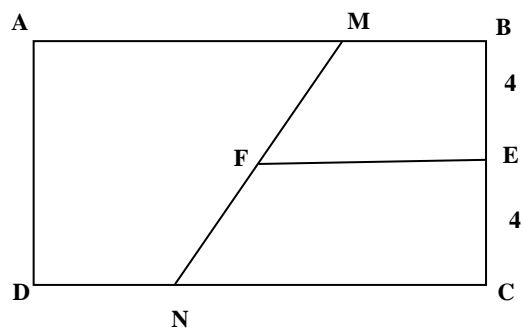
$$BC = 8 ; AB = 10$$

$$BM = DN ; EB = EC$$

Kẻ EF song song với AB, CD

a) So sánh:  $dt(AMND)$  và  $dt(BMNC)$

b) Tính  $EF = ?$



**Hd:**

a)

- Chứng tỏ hai tứ giác BMNC và DNMA là hai hình thang
- Áp dụng công thức tính diện tích hình thang vào 2 tứ giác BMFE và EFNC
- Từ đây suy ra diện tích chúng bằng nhau và bằng nửa diện tích hình chữ nhật

b)

Tính tổng diện tích hai hình thang BMFE và EFNC là hai hình thang bằng diện tích hình thang BMNC là 40.

$$\text{Ta có: } 2 \times (BM + EF) + 2 \times (EF + CN) = 40$$

$$\Rightarrow (BM + EF) + (EF + CN) = 20$$

$$\text{Mà ta biết } BM + CN = AB = 10 \text{ nên suy ra: } 2 \times EF = 10$$

$$\Rightarrow EF = 5$$

### **Bài 25:**

Cho ABCD là hình chữ nhật có: Diện tích hình chữ nhật là  $108 \text{ cm}^2$

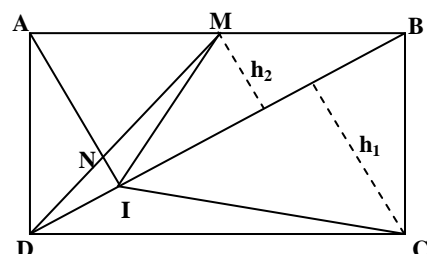
$$MA = MB ; DM = 3 \times DN$$

Hãy tính:

a)  $dt(DMI) = ?$

b)  $dt(DIC) = ?$

c)  $dt(MNIC) = ?$





**Hd:**

a) Ta có  $dt(BDM) = \frac{1}{2} \times dt(ABD) = 27 \text{ cm}^2$

$dt(AMN) = 2 \times dt(ADN)$  và  $dt(IMN) = 2 \times dt(IDN)$   
 $\Rightarrow dt(AMN) + dt(IMN) = 2 \times [dt(ADN) + dt(IDN)]$   
 $\Rightarrow dt(AMI) = 2 \times dt(ADI)$

Mà  $dt(AMI) = dt(BMI) \Rightarrow dt(AMI) = dt(BMI) = 2 \times dt(ADI)$

Ta dễ thấy  $dt(AMI) + dt(BMI) + dt(ADI) = dt(ABD) = 54 \text{ cm}^2$

Do đó suy ra:  $dt(BMI) = 54 : 5 \times 2 = 21,6 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow dt(DMI) = dt(BMD) - dt(BMI) = 27 - 21,6 = 5,4 \text{ cm}^2$

b) Ta có  $dt(BDM) = \frac{1}{2} \times dt(BCD) = 27 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow h_1 = 2 \times h_2$

$\Rightarrow dt(DIC) = 2 \times dt(DMI) = 2 \times 5,4 = 10,8 \text{ cm}^2$

c)

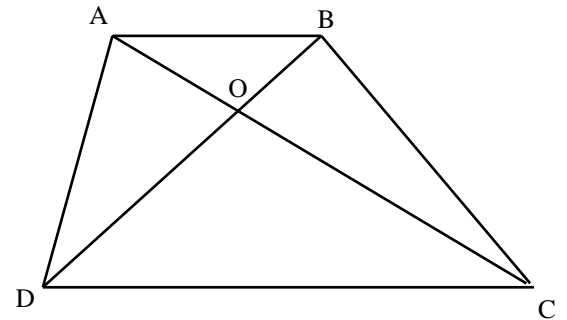
Ta có  $dt(DMI) = dt(DNI) + dt(MNI) = 5,4 \text{ cm}^2$

$dt(MNI) = 2 \times dt(DNI)$

$\Rightarrow dt(MNI) = 5,4 : (2 + 1) \times 2 = 3,6 \text{ cm}^2$

Do đó suy ra:  $dt(MNIC) = dt(BMI) + dt(MNI) + dt(BCD) - dt(CDI)$

$dt(MNIC) = 21,6 + 3,6 + 54 - 10,8 =$



**Bài 26:**

Cho ABCD là hình thang có:

Biết  $dt(ODC) = 4 \text{ cm}^2$ ,  $dt(OAB) = 1 \text{ cm}^2$

Hãy tính  $dt(ABCD) = ?$

**Hd:**

Ta có:

$\frac{OB}{OD} = \frac{dt(AOB)}{dt(AOD)}$  và  $\frac{OB}{OD} = \frac{dt(COB)}{dt(COD)}$

Do đó suy ra  $\frac{dt(COB)}{dt(COD)} = \frac{dt(AOB)}{dt(AOD)}$ . Mà dễ thấy  $dt(COB) = dt(AOD) = x$  và giả thiết đã cho

$dt(ODC) = 4 \text{ cm}^2$ ,  $dt(OAB) = 1 \text{ cm}^2$ . Suy ra có:  $\frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 2$

Vậy diện tích  $dt(ABCD) = 1 + 4 + 2 + 2 = 9 \text{ cm}^2$

**Bài 27:**

Cơ tứ giác ABCD là hình thang

Điểm M trên AB sao cho  $MA = MB$

Gọi giao điểm  $AC \times DB = O$ ;  $MO \times CD = N$

Hãy so sánh độ dài của hai đoạn NC và ND

**Hd:**

Ta có:  $dt(DMB) = dt(CMA)$

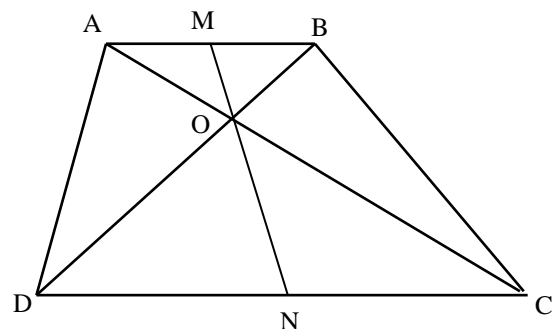
$\Rightarrow S_4 + S_3 + S_2 + S_6 = S_1 + S_2 + S_3 + S_5$

Mà  $S_4 + S_3 = S_1 + S_2$

( Vì ta biết :  $dt(OAM) = dt(OBM)$  )

$\Rightarrow S_2 + S_6 = S_3 + S_5 \Rightarrow dt(DOM) = dt(COM)$

$\Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow dt(DOM) = dt(COM) \Rightarrow NC = ND$



**Bài 28:**

Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là  $675 \text{ m}^2$  và tổng của chiều dài và chiều rộng gấp 4 lần hiệu của chúng. Tính các kích thước của thửa ruộng trên.

**Hd:**

Theo bài ra ta có sơ đồ sau:

Hiệu:  $\text{-----|-----|}$

Tổng:  $\text{-----|-----|-----|-----|-----|-----|}$

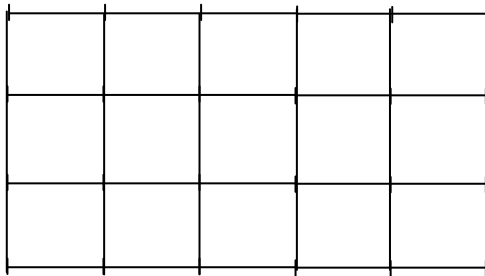
Do đó ta có chiều rộng của mảnh đất là:

$$(8 - 2) : 2 = 3 \text{ (Phần)}$$

Do đó ta có chiều dài của mảnh đất là:

$$(8 + 2) : 2 = 5 \text{ (Phần)}$$

Ta chia chiều dài thành 5 phần bằng nhau, chiều rộng thành 3 phần bằng nhau và đồng thời nối các cặp điểm tương ứng của chiều dài chiều rộng ta được 15 ô vuông bằng nhau với cạnh của ô vuông bằng 1 phần.



Vậy diện tích của mỗi ô vuông là:

$$675 : 15 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy kích thước của mỗi ô vuông là 5 m

Kích thước của chiều rộng thửa ruộng là:

$$5 \times 3 = 15 \text{ (m)}$$

Kích thước của chiều dài thửa ruộng là:

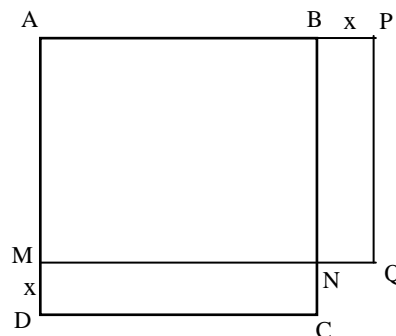
$$5 \times 5 = 25 \text{ (m)}$$

**Bài 29:**

Chứng tỏ rằng trong tất cả các hình chữ nhật và hình vuông cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

**Hd:**

Theo bài ra ta có hình vẽ sau:

**Bài 30:**

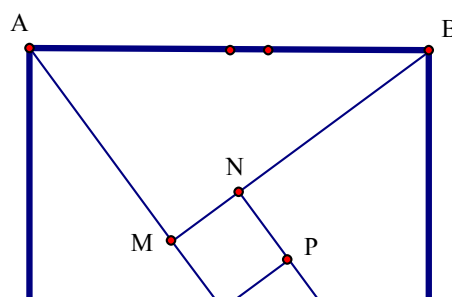
Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, cạnh AC = 3 cm, cạnh AB = 4 cm. Hãy tính độ dài cạnh huyền BC

**Hd:**

- Cắt 4 tam giác vuông ABC vuông tại A, cạnh AC = 3 cm, cạnh AB = 4 cm như bài toán đã cho

- Ghép 4 tam giác vuông đó lại với nhau tạo thành 1 hình vuông ABCD có cạnh là 4 cạnh huyền của chúng và tạo ra 1 hình vuông MNPQ là rỗng ở giữa (theo hình vẽ bên)

Ta có diện tích của hình vuông ABCD



**Bài 31:**

Cho tam giác bất kỳ ABC. Hãy cắt ghép tam giác trên tạo thành hình chữ nhật

**Hd:**

- Cách cắt:

+ Lấy hai điểm M, N lần lượt là điểm chính

giữa của AB, AC

+ Hạ AH ⊥ MN = H

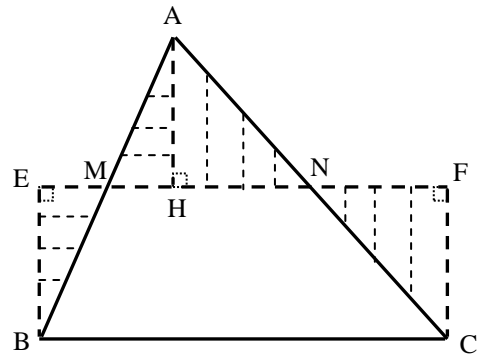
+ Hạ BE ⊥ MN = E

+ Hạ CF ⊥ MN = F

- Cách ghép:

+ Ghép ΔAHM vào ΔBEM

+ Ghép ΔAHN vào ΔCFN



**Bài 32:**

chữ nhật BEFC

Ta có ΔABC được cắt ghép thành một hình

Khi tăng bán kính của hình tròn thêm 20% thì diện tích hình tròn tăng thêm bao nhiêu phần

trăm?

**Hd:**

Bán kính của hình tròn cũ là R, diện tích của hình tròn cũ là:

$$3,14 \times R \times R$$

Vậy bán kính của hình tròn mới là 120%× R, diện tích của hình tròn mới là:

$$3,14 \times 120\% \times R \times 120\% \times R = 3,14 \times R \times R \times 144\%$$

Do đó ta có diện tích của hình tròn tăng lên là:

$$144\% - 100\% = 44\%$$

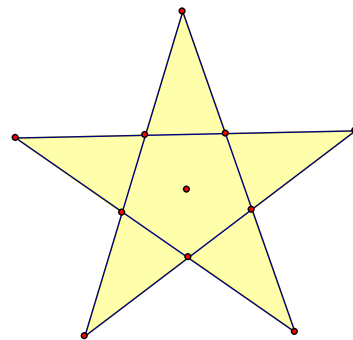
**Bài 33:**

Dùng 5 que diêm xếp thành 10 hình tam

giác?

**Hd:**

Xếp theo hình ông sao 5 cánh hình bên



**Bài 34:**

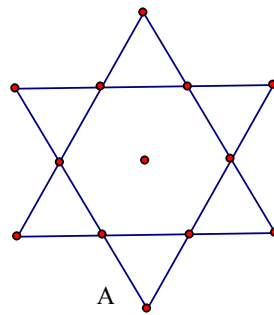
Dùng 6 que diêm xếp thành 8 hình tam

giác?

**Hd:**

Xếp theo 2 hình tam giác đều lồng vào

nhau như hình vẽ bên



**Bài 35:**

Hãy chia tam giác thành 2 phần tương đương bằng 1 đường thẳng đi qua điểm M cho trước nằm trên một cạnh của tam giác đó?

**Hd:**

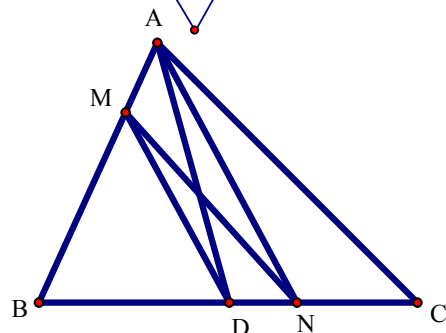
Cách dựng:

+ Lấy D là điểm giữa của cạnh BC

+ Kẻ tia Ax // MD cắt BC tại N. Nối MN là

đường thẳng cần dựng

Chứng minh: Dùng phương pháp diện tích



**Bài 36:**

Hãy chia tứ giác lồi ABCD thành 2 phần tương đương bằng 1 đường thẳng đi qua điểm M cho trước nằm trên cạnh AB của tứ giác đó?

**Hd:**

*Cách dựng:*

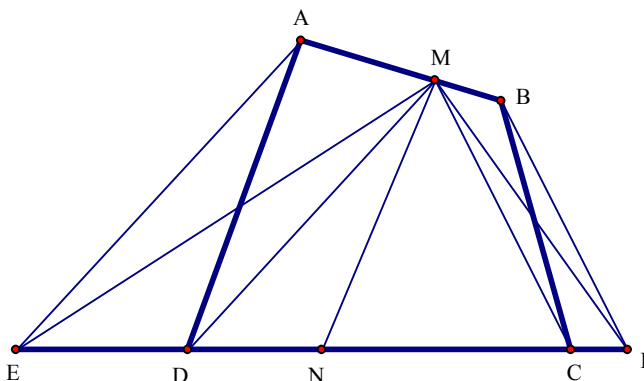
+ Kẻ tia Ax // MD cắt CD kéo dài tại điểm E

+ Kẻ tia By // MC cắt DC kéo dài tại điểm F.

+ Lấy N là điểm giữa của cạnh EF. Nối MN là đường thẳng cần dựng

*Chứng minh:*

Dùng phương pháp diện tích

**Bài 37:**

Khi tăng chiều rộng của một hình chữ nhật thêm 10% thì phải giảm chiều dài của nó đi bao nhiêu phần trăm để diện tích của hình chữ nhật không đổi?

**Hd:**

Hình chữ nhật cũ: Diện tích = chiều dài  $\times$  chiều rộng

Hình chữ nhật mới:

+ Chiều rộng mới =  $1,1 \times$  chiều rộng

+ Chiều dài mới =  $x \times$  chiều dài

+ Diện tích mới =  $1,1 \times$  chiều rộng  $\times x \times$  chiều dài

Để diện tích không đổi thì ta có:

Chiều dài  $\times$  chiều rộng =  $1,1 \times$  chiều rộng  $\times x \times$  chiều dài

$$\Rightarrow 1,1 \times x = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{10}{11}$$

Vậy suy ra chiều dài phải giảm đi  $1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$

**Bài 38:**

Hãy chia một hình chữ nhật kích thước 4 cm  $\times$  6 cm thành 4 phần tương đương nhưng có hình dạng đôi một đều khác nhau?

**Hd:**

+ *Cách 1:* Dùng mắt lưới ô vuông

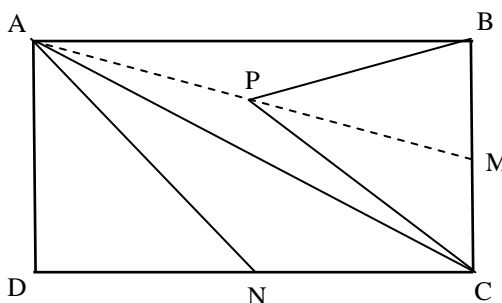
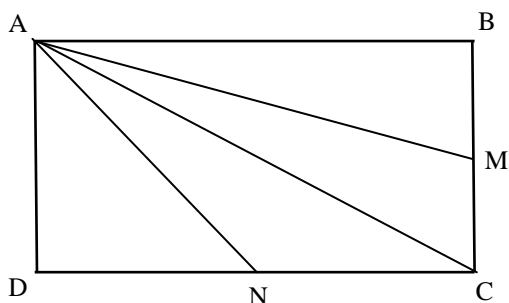
Chia chiều rộng thành 4 phần bằng nhau mỗi phần 1 cm

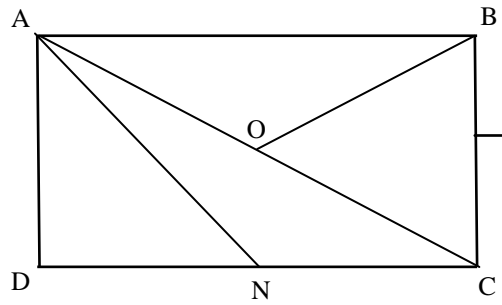
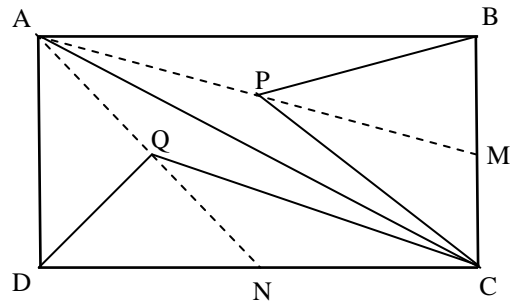
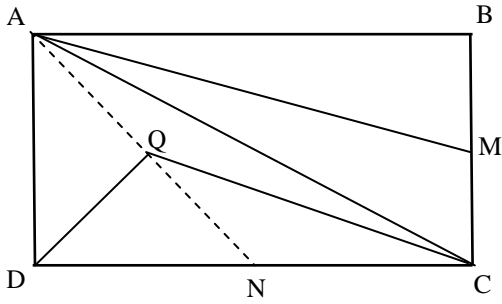
Chia chiều dài thành 6 phần bằng nhau mỗi phần 1 cm

Nối các điểm chia tương ứng trên 2 cạnh đối với nhau tạo thành 24 ô vuông mỗi ô vuông cạnh 1 cm.

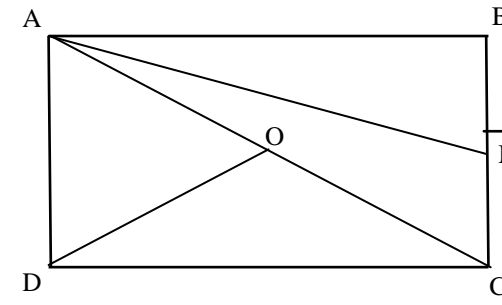
Cắt hình chữ nhật thành 4 hình mỗi hình 6 ô vuông trong đó có hình dạng đôi một khác nhau.

+ *Cách khác:* Không dùng mắt lưới ô vuông và chỉ sử dụng điểm giữa (12 cách)





Tạo ra 3 hình nữa là 4 hình như trên

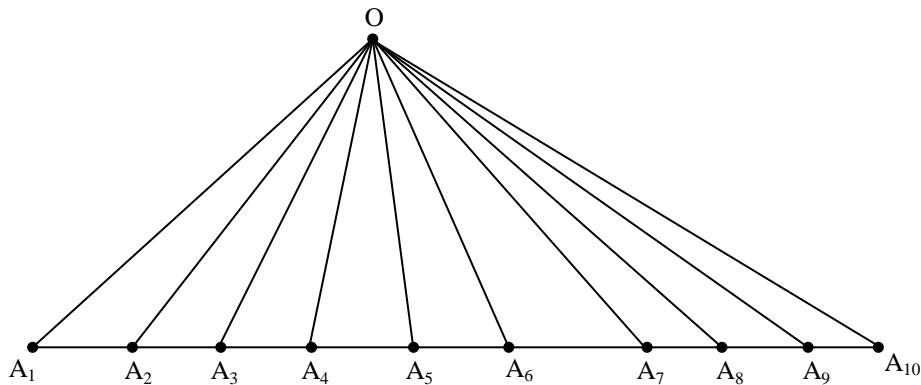


Tạo ra 3 hình nữa là 4 hình như trên

**Bài 39:**

Trong mặt phẳng cho 10 điểm thẳng hàng  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  và một điểm  $O$  ở ngoài đường thẳng nối 10 điểm đó. Tính số tam giác tạo thành khi nối 11 điểm trên với nhau?

**Hd:**



Ta thấy:

Điểm  $A_1$  cùng với 9 điểm  $A_i$  còn lại sau  $A_1$  và cùng với điểm  $O$  tạo thành 9 hình tam giác

Điểm  $A_2$  cùng với 8 điểm  $A_i$  còn lại sau  $A_2$  và cùng với điểm  $O$  tạo thành 8 hình tam giác

.....

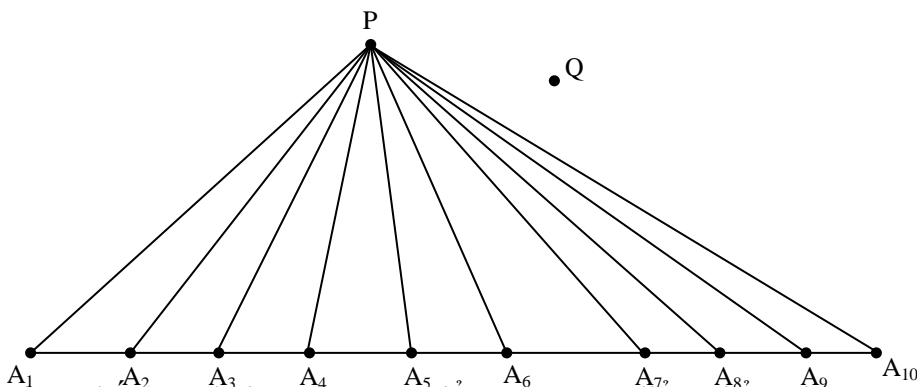
Điểm  $A_9$  cùng với 1 điểm  $A_{10}$  còn lại sau  $A_9$  và cùng với điểm  $O$  tạo thành 1 hình tam giác

Vậy số tam giác tạo thành là:  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$

**Bài 40:**

Trong mặt phẳng cho 10 điểm thẳng hàng  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  và hai điểm P, Q ở ngoài đường thẳng nối 10 điểm đó. Tính số tam giác tạo thành khi nối 12 điểm trên với nhau?

**Hd:**



Ta áp dụng kết quả bài toán trên: Điểm P và 10 điểm thẳng hàng ta được 45 tam giác tạo thành; điểm Q và 10 điểm thẳng hàng ta được 45 tam giác tạo thành nữa.

Xét 2 điểm P, Q, cùng với 1 trong 10 điểm thẳng hàng không thẳng hàng ta có 10 tam giác hoặc 9 tam giác

Kết luận:

Nếu P, Q không thẳng hàng với điểm nào trong 10 điểm ta có  $45 + 45 + 10 = 100$  (tam giác)

Nếu P, Q thẳng hàng với 1 điểm nào đó trong 10 điểm ta có  $45 + 45 + 9 = 99$  (tam giác)

## § 6. MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

### **Bài 1:**

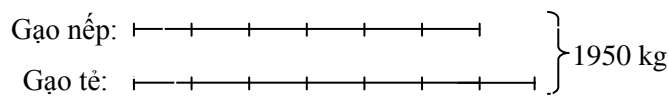
Một cửa hàng gạo có tổng số gạo nếp và gạo tẻ 1950 kg. Sau khi đã bán  $\frac{2}{6}$  số gạo nếp và  $\frac{3}{7}$  số gạo tẻ thì số gạo nếp và gạo tẻ còn lại là bằng nhau. Hỏi lúc đầu cửa hàng có bao nhiêu kg gạo nếp; bao nhiêu kg gạo tẻ?

**Hd:**

Ta có:  $\frac{4}{6}$  số gạo nếp lúc đầu =  $\frac{4}{7}$  số gạo tẻ lúc đầu.

Do đó  $\frac{1}{6}$  số gạo nếp lúc đầu =  $\frac{1}{7}$  số gạo tẻ lúc đầu.

Biểu thị số gạo nếp lúc đầu là 6 phần, số gạo tẻ lúc đầu là 7 phần, ta có sơ đồ:



Giá trị một phần là  $1950 : (6 + 7) = 150$  (kg)

Số gạo nếp lúc đầu là  $150 \times 6 = 900$  (kg)

Số gạo tẻ lúc đầu là  $150 \times 7 = 1050$  (kg)

### **Bài 2:**

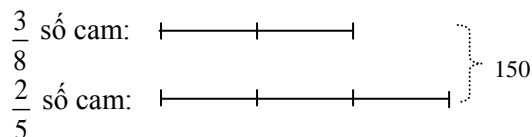
Một cửa hàng rau quả có 2 rổ đựng cam và chanh. Sau khi bán được  $\frac{5}{8}$  số cam và  $\frac{3}{5}$  số chanh thì người bán hàng thấy còn lại 150 quả hai loại, trong đó số cam bằng  $\frac{2}{3}$  số chanh. Hỏi lúc đầu cửa hàng có bao nhiêu quả mỗi loại?

**Hd:**

Phần số chỉ số cam còn lại là  $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ .

Phần số chỉ số chanh còn lại là  $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ .

Ta có sơ đồ:



+  $\frac{3}{8}$  số cam còn lại của cửa hàng là  $150 : (2 + 3) \times 2 = 60$  (quả).

+  $\frac{2}{5}$  số chanh còn lại của cửa hàng là  $150 - 60 = 90$  (quả).

Số cam lúc đầu cửa hàng có là  $60 : 3 \times 8 = 160$  (quả).

Số chanh lúc đầu cửa hàng có là  $90 : 2 \times 5 = 225$  (quả).

### **Bài 3:**

Dung dịch nước biển chứa 5% muối. Hỏi cần đổ thêm bao nhiêu gam nước tinh khiết vào 45 gam dung dịch nước biển để tỷ lệ muối trong đó còn là 3%?

**Hd:**

Lượng muối có trong 45 gam dung dịch nước biển để tỷ lệ muối 5% là:

$$(5 \times 45) : 100 = 2,25 \text{ (g)}$$

Lượng dung dịch nước biển với tỷ lệ muối 3% có chứa 2,25 gam muối là:

$$(2,25 \times 100) : 3 = 75 \text{ (g)}$$

Lượng nước tinh khiết cần phải đổ thêm vào là:

$$75 - 45 = 30 \text{ (g)}$$

**Bài 4:**

Dung dịch nước biển chứa 5% muối. Hỏi cần đổ thêm bao nhiêu gam muối vào 45 gam dung dịch nước biển để tỷ lệ muối trong đó tăng lên là 9%?

**Hd:**

Lượng nước tinh khiết có trong 45 gam dung dịch nước biển để tỷ lệ muối 5% là:

$$(95 \times 45) : 100 = 42,75 \text{ (g)}$$

Lượng dung dịch nước biển với tỷ lệ muối 9% có chứa 42,75 gam nước tinh khiết là:

$$(42,75 \times 100) : 9 = 47,5 \text{ (g)}$$

Lượng muối cần phải đổ thêm vào là:

$$47,5 - 45 = 2,5 \text{ (g)}$$

**Bài 5:**

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà chia hết cho 5?

**Hd:**

*Trường hợp 1:* Chữ số hàng đơn vị chứa chữ số 0

+ Chữ số ở vị trí thứ 1 có 9 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 2 có 8 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 3 có 7 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 4 có 6 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 5 có 5 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:  $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

*Trường hợp 2:* Chữ số hàng đơn vị chứa chữ số 5

+ Chữ số ở vị trí thứ 1 có 8 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 2 có 8 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 3 có 7 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 4 có 6 cách chọn

+ Chữ số ở vị trí thứ 5 có 5 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:  $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 8$

*Kết luận:* Vậy số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$$(5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9) + (5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 8)$$

**Bài 6:**

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?

**Hd:**

Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau:

+ Chữ số ở vị trí thứ 1 có 9 cách chọn



- + Chữ số ở vị trí thứ 2 có 9 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 3 có 8 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 4 có 7 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 5 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 6 có 5 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:  $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 9$

Mà trong tập các số tự nhiên trên số các số chẵn và các số lẻ là bằng nhau, nên suy ra số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2 là:

$$(5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 9) : 2 = 5 \times 3 \times 7 \times 8 \times 9 \times 9$$

### **Bài 7:**

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà chia hết cho 4?

#### **Hd:**

Ta biết rằng điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên chia hết cho 4 là 2 chữ số tận cùng là số chia hết cho 4.

Số các số gồm 2 chữ số hàng chục và hàng đơn vị khác nhau mà chia hết cho 4:

$$\{04, 08, 12, \dots, 92, 96\} \setminus \{44, 88\} \text{ ---- } [(96 - 04) : 4 + 1] - [2] = 22$$

Trong 22 số đó có 16 số không chứa chữ số không và 6 số chứa một chữ số 0 là: 04, 08, 20, 40, 60, 80.

*Trường hợp 1:* Hai chữ số cuối chứa 1 chữ số 0

- + Chữ số ở vị trí thứ 1 có 8 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 2 có 7 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 3 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 4 có 5 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 4 là:  $6 \times [5 \times 6 \times 7 \times 8]$

*Trường hợp 2:* Hai chữ số cuối không chứa chữ số 0

- + Chữ số ở vị trí thứ 1 có 7 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 2 có 7 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 3 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 4 có 5 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 4 là:  $16 \times [5 \times 6 \times 7 \times 7]$

*Kết luận:* Vậy số các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau chia hết cho 4 là:

$$(6 \times [5 \times 6 \times 7 \times 8]) + (16 \times [5 \times 6 \times 7 \times 7])$$

### **Bài 8:**

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 được cấu tạo từ các chữ số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?

#### **Hd:**

*Trường hợp 1:* Chữ số hàng đơn vị chứa chữ số 0

- + Chữ số ở vị trí thứ 1 có 7 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 2 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 3 có 5 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 4 có 4 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:  $4 \times 5 \times 6 \times 7$

*Trường hợp 2:* Chữ số hàng đơn vị chứa chữ số 5

- + Chữ số ở vị trí thứ 1 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 2 có 6 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 3 có 5 cách chọn
- + Chữ số ở vị trí thứ 4 có 4 cách chọn

⇒ Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:  $4 \times 5 \times 6 \times 6$

*Kết luận:* Vậy số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$$(4 \times 5 \times 6 \times 7) + (4 \times 5 \times 6 \times 6)$$

### **Bài 9:**

Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt 3 lần, còn các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

**Hd:**

Theo bài ra ta thấy số tự nhiên có chữ số 4 có mặt 3 lần, còn 4 chữ số còn lại có mặt đúng một lần là số tự nhiên có 7 chữ số.

Do vậy chữ số 0 có 6 vị trí để chọn

Chữ số 4 có mặt đúng 3 lần, tức là chiếm 3 vị trí còn lại trong 6 vị trí còn lại: Chữ số 4 có  $C_6^3 = 20$  cách chọn

Với 3 vị trí còn lại thì 3 chữ số 1, 2, 3 mỗi chữ số chiếm một, nên có  $3! = 1 \times 2 \times 3$  cách chọn.

$\Rightarrow$  Số các số tự nhiên trong đó chữ số 4 có mặt 3 lần, còn các chữ số còn lại có mặt đúng một lần là:  $6 \times 20 \times 6 = 120$  số

### **Bài 10:**

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?

**Hd:**

Ta có:

+ Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số là:  $9 \times 10 \times 10 \times 10$

+ Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số, trong đó có đúng một chữ số lặp lại đúng 3 lần là:

Chữ số 0 lặp lại đúng 3 lần là: 9

Chữ số 1 lặp lại đúng 3 lần là:

Vị trí thứ 1 có 8 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 2 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 3 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 4 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

$\Rightarrow$  Số các số tự nhiên có 4 chữ số trong đó chữ số 1 lặp lại đúng 3 lần là:  $8 \times 9 \times$

$$9 \times 9 = 35$$

.....  
Chữ số 9 lặp lại đúng 3 lần là:

Vị trí thứ 1 có 8 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 2 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 3 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

Vị trí thứ 4 có 9 cách chọn 9 chữ số ngoài số 1

$\Rightarrow$  Số các số tự nhiên có 4 chữ số trong đó chữ số 1 lặp lại đúng 3 lần là:  $8 \times 9 \times$

$$9 \times 9 = 35$$

Vậy số các số tự nhiên gồm 4 chữ số, trong đó có đúng một chữ số lặp lại đúng 3 lần là  $9 + 9 \times 35 = 324$

*Suy ra:* Số các số tự nhiên có 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần là:  $[9 \times 10 \times 10 \times 10] - [324] = 8676$

### **Bài 11:**

Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có mặt chữ số 5?

**Hd:**

Trường hợp 1: Số tự nhiên tạo thành chứa chữ số 0

- Có 4 vị trí có thể chọn chữ số 0, sau đó còn 4 vị trí chọn chữ số 5.

- Ta thấy 3 vị trí còn lại chọn 3 trong 5 chữ số  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ , tức là có  $5 \times 4 \times 3$  cách chọn.

Do vậy số các số tự nhiên trong trường hợp này là:  $4 \times 4 \times [5 \times 4 \times 3]$

Trường hợp 2: Số tự nhiên tạo thành không chứa chữ số 0

- Có 5 cách chọn vị trí có thể chọn chữ số 5, sau đó còn 4 vị trí còn lại chọn 4 trong 5 chữ số  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ , tức là có  $5 \times 4 \times 3 \times 2$  cách chọn.

Do vậy số các số tự nhiên trong trường hợp này là:  $5 \times [5 \times 4 \times 3 \times 2]$

Tóm lại: Số số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có mặt chữ số 5 là:  $\{4 \times 4 \times [5 \times 4 \times 3]\} + \{5 \times [5 \times 4 \times 3 \times 2]\}$

### **Bài 12:**

Một đoàn vận động viên tham gia thi đấu thể thao gồm 2 môn bắn súng và bơi lội. Trong đoàn số vận động viên nam có 10 người, số vận động viên bắn súng có 14 người. Tính số người của toàn đoàn, biết số nữ thi bơi bằng số nam bắn súng.

#### **Hd:**

Ta có:

Số người của toàn đoàn = Số nam + Số nữ

Số nữ của toàn đoàn = Số nữ bơi + Số nữ bắn súng

Mà theo bài ra ta có số nữ thi bơi bằng số nam bắn súng, nên suy ra:

Số nữ của toàn đoàn = Số nam bắn súng + Số nữ bắn súng = Số người bắn súng = 14 người.

Vậy số người của toàn đoàn là:  $10 + 14 = 24$  (người)

### **Bài 13:**

Một nhóm học sinh gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 người trên thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam đứng cạnh nhau?

#### **Hd:**

Để 7 học sinh nam đứng cạnh nhau ta có số cách là  $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

Khi 7 học sinh nam đứng cạnh nhau ta coi như cùng 1 vị trí và cùng với 3 học sinh nữ xếp vào 4 vị trí. Ta có  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$  cách

Do vậy số cách xếp 10 học sinh đã cho thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam đứng cạnh nhau là:  $4! \times 7!$

### **Bài 14:**

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 5 người A, B, C, D, E thành một hàng ngang sao cho hai người A, B không đứng cạnh nhau?

#### **Hd:**

Số cách xếp 5 người A, B, C, D, E thành một hàng ngang là:  $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$

Hai người A, B đứng cạnh nhau ta coi là một người và hàng đó chỉ còn 4 người và có 2 trường hợp xảy ra.

Mà số cách xếp 4 người thành một hàng ngang là:  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ .

Do đó số cách xếp 5 người A, B, C, D, E thành một hàng ngang sao cho hai người A, B đứng cạnh nhau là:  $(1 \times 2 \times 3 \times 4) \times 2$

Vậy số cách xếp 5 người A, B, C, D, E thành một hàng ngang sao cho hai người A, B không đứng cạnh nhau là:  $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) - (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times 2$

### **Bài 15:**

Trong một tháng nào đó có 3 ngày thứ năm là ngày chẵn. Hỏi ngày 26 của tháng đó là ngày thứ mấy?

**Hd:**

Vì tháng đó có 3 ngày thứ năm là ngày chẵn và một tháng tối đa chỉ chứa 5 ngày của một thứ, nên suy ra: Tháng đó có 5 ngày thứ năm (2 ngày thứ năm lẻ xen kẽ 3 ngày thứ năm là ngày chẵn.)

Các ngày thứ năm của tháng đó có thể lần lượt là:  $a, a + 7, a + 14, a + 21, a + 28$

Nếu  $a$  là số lẻ thì  $a + 7$  và  $a + 21$  phải là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết tháng đó có 3 ngày thứ năm là ngày chẵn. Vậy suy ra  $a$  phải là số chẵn

Vì số ngày trong một tháng chỉ từ 1 tới 31, nên ta có  $a + 28 \leq 31 \Rightarrow a \leq 3$

Từ đây suy ra  $a = 2$

Do đó suy ra: Ngày 23 = 2 + 3 × 7 là thứ năm và ngày 26 là ngày chủ nhật.

### **Bài 16:**

Một nhóm bạn thân bao gồm cả nam và nữ. Tính số người trong nhóm người đó biết rằng:

- Mỗi bạn nam trong nhóm có số bạn nam thân bằng số bạn nữ thân của mình.
- Mỗi bạn nữ trong nhóm có số bạn nữ thân bằng nửa số bạn nam thân của mình.

**Hd:**

Theo bài ra ta có:

Mỗi bạn nam trong nhóm có số bạn nam thân bằng số bạn nữ thân của mình, tức là: Số nam nhiều hơn số nữ là 1 người (Số nam = Số nữ + 1). Suy ra: 2 lần số nam bằng 2 lần số nữ thêm vào 2 người.

Mỗi bạn nữ trong nhóm có số bạn nữ thân bằng nửa số bạn nam thân của mình, tức là: Số nam bằng 2 lần số nữ bớt đi 2 người (Số nam = 2 × Số nữ - 2).

Do đó suy ra: 2 lần số nữ bớt đi 2 chính bằng số nữ thêm vào 1 người

Vậy suy ra: Số nữ chính bằng 3 người. Từ đây suy ra số nam bằng 4 người. Vậy ta có số người trong nhóm là 7 người.

### **Bài 17:**

Giá hoa ngày 8/3 tăng 10% so với trước ngày 8/3, giá hoa sau ngày 8/3 giảm 10% so với ngày 8/3. Hãy so sánh giá hoa trước ngày 8/3 và sau ngày 8/3?

**Hd:**

Gọi giá hoa trước ngày 8/3 là 100% thì ta có giá hoa ngày 8/3 là 110% và giá hoa sau ngày 8/3 là:

$$110\% - 110\% \times 10\% = \frac{110}{100} - \frac{110}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{99}{100} = 99\%$$

Vậy giá hoa sau ngày 8/3 rẻ hơn giá hoa sau ngày 8/3 là 1%

### **Bài 18:** Nguyên tắc Diriclé tổng quát

Cho một tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử riêng biệt. Chứng minh rằng: Với bất kỳ cách phân hoạch tập hợp  $A$  thành  $m$  tập con rời nhau:  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . thì luôn luôn tồn tại 1 tập con chứa ít nhất  $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$  phần tử

**Hd:**

Theo bài ra phân hoạch tập hợp  $A$  được phân hoạch thành  $m$  tập con rời nhau  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , nên ta có:  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$  &  $A_i \cap A_j = \emptyset$  với  $i \neq j$

Nếu tất cả các  $A_i$  có số phần tử bằng nhau và bằng  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$  thì số phần tử của  $A$  sẽ là  $m \times \lfloor \frac{n}{m} \rfloor < n$ . Do đó suy ra phải tồn tại 1 tập con  $A_i$  sao cho chứa ít nhất  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$  phần tử.

**Bài 19:**

Trong một lớp học có 32 em học sinh. Hãy chứng tỏ rằng trong đó có ít nhất 2 em có cùng ngày sinh và có ít nhất 3 em có cùng tháng sinh?

**Hd:**

- Áp dụng nguyên tắc Diriclé tổng quát với  $n = 32$  và  $m = 31$  (Vì một tháng có tối đa 31 ngày). Ta có kết quả là:  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{32}{31} \rfloor + 1 = 2$  học sinh cùng ngày sinh

- Áp dụng nguyên tắc Diriclé tổng quát với  $n = 32$  và  $m = 12$  (Vì một có 12 tháng). Ta suy ra kết quả là:  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{32}{12} \rfloor + 1 = 3$  học sinh cùng tháng sinh

**Bài 20:**

Trong một trường học có 740 em học sinh. Hãy chứng tỏ rằng trong đó có ít nhất 3 em có cùng ngày sinh và cùng tháng sinh?

**Hd:**

Áp dụng nguyên tắc Diriclé tổng quát với  $n = 740$  và  $m = 366$  (Vì một năm có 365 ngày hoặc 366 ngày). Ta suy ra kết quả là:  $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{740}{366} \rfloor + 1 = 3$  học sinh cùng ngày sinh và tháng sinh.